

محمد صابور

BAC

دراسة الدوال

الدوال : الناطقة - الجذرية - المثلثية
الأسية و اللوغاريتمية

100 مسألة نموذجية

البرنامج الجديد

دار المفيد
للنشر والتوزيع

محمد صابور

دراســة الــــدوال

الدوال : الناطقة - الجذرية - المثلثية
الأسيــة - اللوغاريتميــة

100 مسألة نموذجية بكالوريا

(البرنامج الجديـد)

الشعب : - علوم تجريبية
- رياضيــات
- تقني رياضي

رقم الإيداع القانوني: 2007 - 4304

ردمك : 7 - 1946 - 0 - 9947 - 987

دار المفيد للنشر والتوزيع – عين مليلة
الهاتف : 11-10-45-032

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم
الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على أشرف المرسلين
سيد البشرية محمد صلى الله عليه وسلم .

أخي القارئ ، أضع بين يديك عنوانا جديدا "دراسة الدوال"

يضاف إلى قائمة " سلسلة البكالوريا بين يديك"

إن هذا الكتاب يحتوي 100 مسألة نموذجية بكالوريا

إن كثرة المسائل المحلولة الذي يحتويها هذا الكتاب ستساعد التلميذ على تجاوز كل الصعوبات التي يتلقاها في دراسة الدوال.
إن الملخص والتوجيهات القيمة التي يحتويها هذا الكتاب تدعم التلميذ وتعطيه القدرات للإجابة على الأسئلة الخاصة بدراسة الدوال.
وأخيرا أتمنى لكل القراء من طلبتنا الأعزاء التوفيق في امتحان البكالوريا" إن شاء الله" ، كما أرجو من زملائي أساتذة الرياضيات أن يمدوني بملاحظاتهم البناءة لتحسين محتوى هذا الكتاب .
كما أشكر شكرا جزيلا كل من قدم لي يد المساعدة في إنجاز هذا الكتاب.

الأستاذ : محمد صابور

الإهـــداء

-إلى والدي الكريمين

- إلى رجال التعليم المخلصين في واجبهم

- إلى أبنائي الطلبة متمنيا لهم النجاح

" في امتحان البكالوريا"

بالتوفيق إن شاء الله في البكالوريا

الدوال العـــدديـــة

مجموعة التعريف

مجموعة قيم المتغير الحقيقي x من أجلها نستطيع حساب $f\left(x\right)$ تسمى مجموعة التعريف الدالة f .

الاستمرار

- **الاستمرار عند النقطة x_0**

تكون الدالة f مستمرة عند النقطة x_0 إذا كانت معرفة عند x_0 وفي جواره و $\lim\limits_{x \to x_0} = f\left(x_0\right)$.

إذا كانت الدالة f مستمرة على يمين وعلى يسار x_0 فهي مستمرة عند x_0 .

- **الاستمرار على مجال**

تكون الدالة f مستمرة على المجال $]a;b[$ إذا كانت مستمرة عند كل نقطة x_0 من هذا المجال. إذا كانت f و g دالتين مستمرتين على المجال D فإ ن:

$\left(\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}}\right)$, $(\mathbf{f} \times \mathbf{g})$, $(f+g)$ هي أيضا دوال مستمرة على D

نقبل أن : - الدوال كثيرات الحدود مستمرة على $\mathbb{R}$

- الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري الحدود) هي مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها .

الاشتقاق

- **المشتق عند النقطة x_0**

f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح يشمل x_0 .

إذا كان $l = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f\left(x\right) - f\left(x_0\right)}{x - x_0}$ نقول بأن الدالة f تقبل الاشتقاق عند النقطة x_0

ويسمى العدد l (يرمز له بالعدد $f'\left(x_0\right)$) العدد المشتق

يمكن أيضا أن نعرف $f'\left(x_0\right)$ بـ: $f'\left(x_0\right) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f\left(x_0 + h\right) - f\left(x_0\right)}{h}$

- **التفسير الهندسي للعدد المشتق**

العدد المشتق $f'(x_0)$ هو معامل التوجيه للمماس للمنحني (c) للدالة f عند x_0

- **المشتق على يمين وعلى يسار x_0**

- إذا كان $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lambda$ ($x > x_0$) فالعدد λ يسمى مشتق الدالة f على يمين x_0

- إذا كان $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \beta$ ($x < x_0$) فالعدد β يسمى مشتق الدالة f على يسار x_0

تكون الدالة f قابلة الاشتقاق عند x_0 إذا كانت قابلة الاشتقاق على يمين وعلى يسار x_0 والمشتق على اليمين يساوي المشتق على اليسار أي $\lambda = \beta$.

- **مشتق دالة على مجال**

تكون الدالة f قابلة الاشتقاق على المجال $]a;b[$ إذا كانت قابلة الاشتقاق من اجل كل قيمة x_0 تنتمي إلى المجال $]a;b[$

إذا كانت الدالتين f و g قابلتين الاشتقاق على المجال D فإن:

$\left(\frac{f}{g}\right)$, $(f \times g)$, $(f+g)$ هي أيضا دوال قابلة الاشتقاق على D وتكون :

- $(f+g)' = f' + g'$
- $(\lambda \times f)' = \lambda \times f'$ حيث λ هو عدد حقيقي
- $(f \times g)' = f' \times g + g' \times f$

- **مشتق بعض الدوال**

- $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda)' = 0$
- $(x^n)' = n \times x^{n-1}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $\sin(ax+b)' = a \times \cos(ax+b)$

- $\cos(ax+b)' = -a\times\sin(ax+b)$

- $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

- $\left(\left[f(x)\right]^n\right)' = n\times\left[f(x)\right]^{n-1}\times f'(x)$

- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

- $\left[\ln u(x)\right]' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

- $\left(e^x\right)' = e^x$

- $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)\times e^{u(x)}$

- $\left(a^x\right)' = \ln a\times a^x \quad \left(a\in\mathbb{R}^+\right)$

دراسة تغيرات دالة

f دالة عددية معرفة على المجال D

- إذا كان $f'(x)\geq 0$ من أجل كل $x\in D$ فإن f متزايدة على المجال D
- إذا كان $f'(x)\leq 0$ من أجل كل $x\in D$ فإ ن f متناقصة على المجال D
- إذا كان $f'(x)=0$ من أجل كل $x\in D$ فإن f ثابتة على المجال D .

نظرية القيم المتوسطة

إذا كانت الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[a;b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، المعادلة $f(x)=k$ تقبل حل وحيد في المجال $[a;b]$

نقاط التقاطع للمنحني مع المحاورين

1) إذا كانت للمعادلة $f(x)=0$ فإ ن المنحني (c) للدالة f يقطع محور الفواصل وجذور هذه المعادلة تمثل فواصل هذه النقاط . 2) إذ كانت الدالة f معرفة من أجل $x=0$ فإن منحني الدالة f يقطع محور الترتيب في النقطة $\left(0,f(0)\right)$

مركز تناظر منحني

1) إذا كانت الدالة f فردية فالمنحني (c) للدالة f يقبل مركز تناظر النقطة $o(0;0)$

2) إذا كان $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$ فالنقطة $\varpi(\alpha;\beta)$ هي مركز تناظر للمنحني (c) للدالة f

محور تناظر منحني

1) إذا كانت f دالة زوجية أي $f(-x) = f(x)$ فمنحني الدالة f يقبل في معلم متعامد و متجانس محور الترتيب"محور تناظر له"

2) إذا كان $f(x-2\alpha) = f(x)$ فالمستقيم ذوا لمعادلة $x = \alpha$ هو محور تناظر للمنحني (c) للدالة f في معلم متعامد و متجانس

النهاية الصغرى والنهاية العظمى لمنحني

f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح يشمل x_0 ، $f'(x)$ مشتقها.

إذا كان $f'(x_0) = 0$ والمشتق $f'(x)$ يغير إشارته بمرور على x_0

فالنقطة $(x_0; f(x_0))$ هي نهاية عظمى أو نهاية صغرى لمنحني الدالة f

نقطة انعطاف لمنحني

f دالة عددية معرفة عند x_0 ،إذا كان $f''(x)$ ينعدم عند x_0 مغيرا إشارته بمرور على x_0

فتكون النقطة $(x_0; f(x_0))$ نقطة انعطاف لمنحني الدالة f

النقطة الزاوية لمنحني

f دالة عددية معرفة عند x_0 وقابلة الاشتقاق على يمين و على يسار x_0 ،إذا كان العدد المشتق $f'(x_0)$ على يمين ويسار x_0 غير متساويان،في هذه الحالة منحني الدالة f له عند x_0 نصفي مماسين(النقطة x_0 هي نقطة زاوية)

معادلة المماس للمنحني عند النقطة x_0

f دالة عددية معرفة عند x_0 ، (c) منحنيها البياني.

معادلة المماس للمنحني (c) عند النقطة التي فاصلتها x_0 هي :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

الفروع اللانهائية للمنحني

عندما $+\infty \rightarrow |x|$ أو $+\infty \rightarrow |y|$ نقول بأن المنحني (c) للدالة f له فرعا لانهائي

1)- إذا كان $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ ،نقول بأن المستقيم (D) ذو المعادلة $x = a$ هو مستقيم مقارب لمنحني الدالة f

2)-إذا كان $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = b$ نقول بأن المستقيم ذوا لمعادلة $y = b$ هو مستقيم لمنحني الدالة f في جوار $(+\infty)$ وفي جوار $(-\infty)$

3)-إذا كا ن $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \left[f(x) - (ax + b)\right] = 0$ يكون المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مستقيم مقارب لمنحني الدالة f في جوار $(-\infty)$ وفي جوار $(+\infty)$

ملاحظات

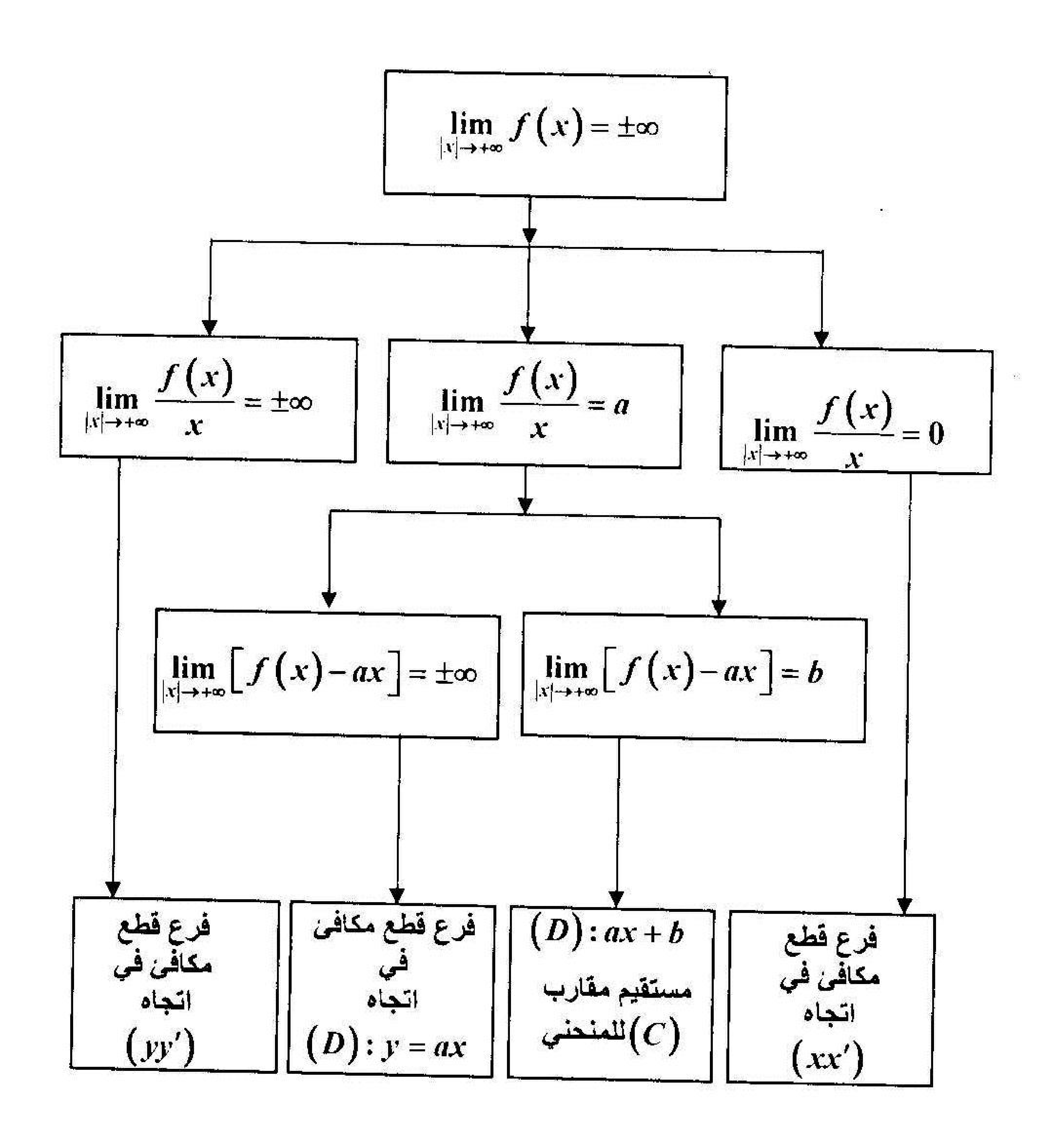
1)- إذا كان $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = \pm\infty$ ،احتمال وجود مستقيم مقارب مائل للدالة f

2)- المستقيم المقارب العمودي ذو العادلة $x = a$ لا يقطع أبدا منحني الدالة f

3)- المستقيم المقارب المائل(الأفقي) يمكن أن يقطع منحني الدالة f .

وضعية منحني بالنسبة لمستقيم مقارب مائل

- إذا كانت للمعادلة $f(x) = ax + b$ حلول ،منحني الدالة f يقطع المستقيم
- المقارب (D) ذوا لمعادلة $y = ax + b$
- في المجال الذي يكون فيه $f(x) - (ax + b) \prec 0$ ،يكون منحني الدالة f تحت المستقيم المقارب (D)
- في المجال الذي يكون فيه $f(x) - (ax + b) \succ 0$ ،فيكون منحني الدالة f فوق المستقيم المقارب (D)



$\lim_{|x|\to+\infty} f(x)=\pm\infty$
$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=\pm\infty$
$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=a$
$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=0$
$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=\pm\infty$
$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=b$
فرع قطع
مكافئ في
اتجاه
(yy')
فرع قطع مكافئ
في
اتجاه
$(D): y=ax$
$(D): ax+b$
مستقيم مقارب
للمنحني(C)
فرع قطع
مكافئ في
اتجاه
(xx')

الدوال الأصلية

كل دالة مستمرة على مجال فهي تقبل دوال أصلية على هذا المجال.

يرمز لمجموعة الدوال الأصليه للدالة f بـــ: $\int f(x)\,dx$

إذا كان g هي دالة أصلية للدالة f فإن: $g'(x) = f(x)$ ونكتب :

$\int f(x)\,dx = g(x) + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$

- دوال أصلية لبعض الدوال

- $\int \lambda\,dx = \lambda x + c$
- $\left(n \in \mathbb{Q} - \{-1\}\right)$ $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$
- $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
- $\int \cos x\,dx = \sin x + c$
- $\int \dfrac{1}{(\cos x)^2}\,dx = \tan x + c$
- $\int \sin(\alpha x + \beta)\,dx = -\dfrac{1}{\alpha}\cos(\alpha x + \beta) + c$
- $\int \cos(\alpha x + b)\,dx = \dfrac{1}{\alpha}\sin(\alpha x + b) + c$
- $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$
- $\int \dfrac{dx}{ax+b} = \dfrac{1}{a}\ln|ax+b| + c$
- $\int e^x\,dx = e^x + c$
- $\int e^{ax+b}\,dx = \dfrac{1}{a}e^{ax+b} + c$
- $\int [f(x)]^n \times f'(x)\,dx = \dfrac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$

- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

- $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + c$

- $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} dx = -\frac{1}{f(x)} + c$

التكامل بالتجزئة

- $\int f'(x) \times g(x) dx = f(x) \times g(x) - \int f(x) \times g'(x) dx$
- $\int f(x) \times g'(x) dx = f(x) \times g(x) - \int f'(x) \times g(x) dx$

التكامل المحدود

f دالة مستمرة على المجال D و g دالة أصلية لها، a و b قيمتين من هذا المجال.

نسمي التكامل المحدود من a إلى b للدالة f العدد الحقيقي $g(b) - g(a)$ ونكتب :

$$\int_a^b f(x) dx = [g(x)]_a^b = g(b) - g(a)$$

- **خواص التكامل المحدود**

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad , \quad \int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

إذا كانت f الدالة مستمرة على مجال يشمل القيم a, b, c فإن :

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

$$\int_a^b \lambda \times f(x) dx = \lambda \times \int_a^b f(x) dx$$

إذا كان من أجل $x \in [a;b] : f(x) \geq 0$ فإن : $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

إذا كان $f(x) \geq g(x)$ على المجال $[a;b]$ فإن: $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$

حساب مساحة حيز المستوى

- المساحة المحصورة بين المحني (c)ومحور الفواصل والسقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$

$s=\int_a^b f(x)dx$ (لما يكون (c)فوق محور الفواصل على المجال $[a;b]$)

$s=-\int_a^b f(x)dx$ (لما يكون (c)تحت محور الفواصل على المجال$[a;b]$)

- المساحة المحصورة بين منحنيين (c)و (c')للدالتين f و g والمستقيمين $x=a$ و $x=b$

- $s=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$ (لما يكون (c)فوق (c') على المجال $[a;b]$)

- $s=\int_a^b [g(x)-f(x)]dx$ (لما يكون (c) تحت (c') على المجال $[a;b]$)

ملاحظة : في جميع الحالات نضرب العدد s في وحدة المساحة التي تساوي $\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$



الـــدوال الناطقـــة

- الدوال من الشكل: $x \to \dfrac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}$

لدراسة هذا النوع من الدوال يستحسن كتابتها على الشكل:

$f(x) = \alpha x + \beta + \dfrac{\gamma}{a'x+b'}$. هذه الدوال معرفة على $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{-b'}{a'}\right\}$.

منحني هذه الدوال يقبل دائما مستقيم مقارب مائل معادلته $y = \alpha x + \beta$ ومستقيم مقارب عمودي معادلته $x = \dfrac{-b'}{a'}$. . نقطة التقاطع المستقيمين المقاربين هي مركز تناظر المنحني

- الدوال من الشكل : $x \to \dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$

إذا كانت المعادلة $a'x^2+b'x+c'=0$ ليست لها حلول فتكون هذه الدوال معرفة على $\mathbb{R}$

إذا كانت المعادلة $a'x^2+b'x+c'=0$ تقبل جذرين $x=x_1$ و $x=x_2$ تكون هذه الدوال معرفة على $\mathbb{R} - \{x_1, x_2\}$.

منحني هذه الدوال يقبل دائما مستقيم مقارب أفقي معادلته $(a' \neq 0)$ $y = \dfrac{a}{a'}$ ويقطع المنحني هذا المستقيم المقارب في نقطة وحيدة إذا كانت للمعادلة $f(x) = \dfrac{a}{a'}$ حل .

منحني هذه الدوال له مستقيم مقارب $x = \dfrac{-b'}{2a'}$ أو مستقيمين مقاربين $x=x_1$ و $x=x_2$ حسب المعادلة $a'x^2+b'x+c'=0$ إن كانت لها جذرا مضاعف أو جذرين

- الدوال من الشكل : $x \to \dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{a'x^2+b'x+c'}$

عبارة هذه الدوال تكتب على الشكل : $f(x) = \alpha x + \beta + \dfrac{\gamma x + \delta}{a'x^2+b'x+c'}$

منحني هذا النوع من الدوال يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = \alpha x + \beta$ ويقبل مستقيم مقارب أو مستقيمين مقاربين عمودين وهذا إن كانت للمعادلة $a'x^2+b'x+c'=0$ جذرا مضاعف أو جذرين .

أمثلة على دراسة الدوال الناطقة

لندرس دراسة كاملة (تغيرات، الفروع اللانهائية، رسم المنحني) لكل من الدوال التالية :

1) $f(x)=\dfrac{2x^2+8x+2}{x^2+2x+1}$ 2) $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2-9}$

3) $f(x)=\dfrac{-2x^2+3x+2}{2x-1}$ 4) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+3x+3}$

5) $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{(x+1)^2}$ 6) $f(x)=2x+3-\dfrac{1}{(x+1)^2}$

الحـــــل

1) $f(x)=\dfrac{2x^2+8x+2}{x^2+2x+1}$

مجموعة التعريف : $D_f=]-\infty,\ -1[\cup]-1,\ +\infty[$

حساب النهايات : $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=2$

حساب المشتق : من أجل كل $x\in D_f$: $f'(x)=\dfrac{4(x-1)}{(x+1)^3}$

جدول التغيرات :

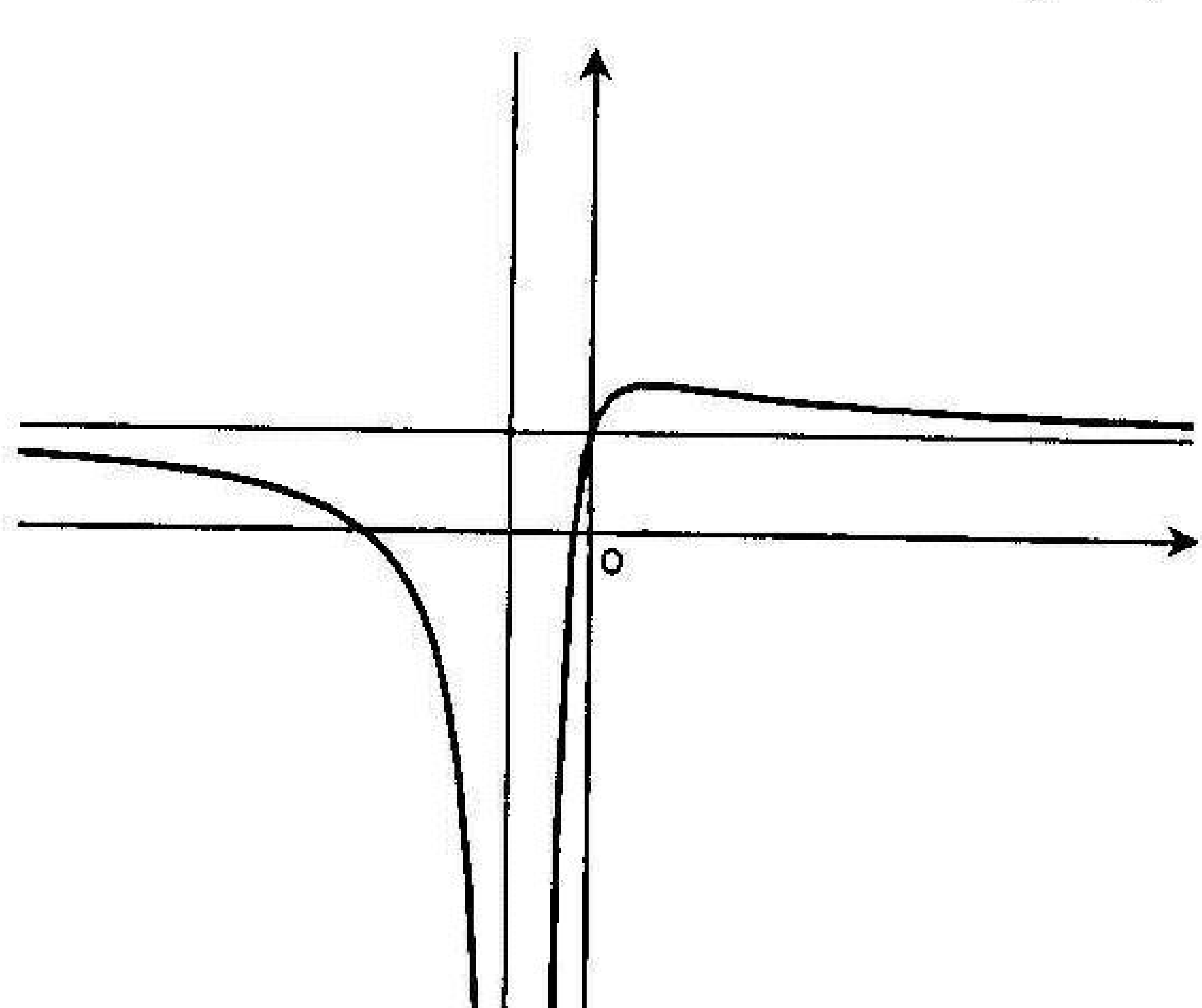
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	2 ↘		$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	3	↘	2

الفروع اللانهائية:

- المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ هو مستقيم مقارب للمنحني

- المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$

المنحني :



2) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2-9}$

مجموعة التعريف : $D_f =]-\infty, -3[\cup]-3, 3[\cup]3, +\infty[$

حساب النهايات :

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3} f(x) = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} f(x) = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -3} f(x) = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \xrightarrow{<} -3} f(x) = -\infty$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$: $f'(x) = \dfrac{-2(x^2+3x+9)}{(x^2-9)^2}$

جدول التغيرات :

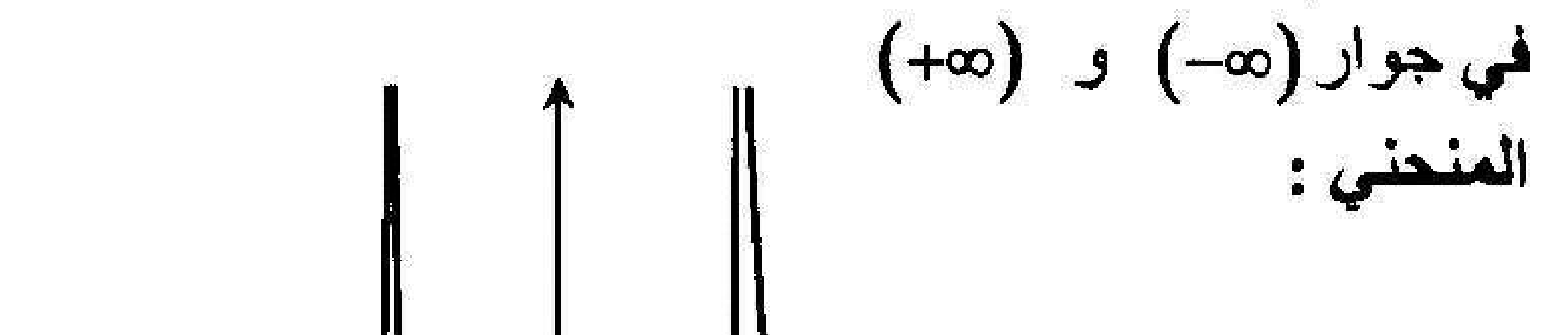
x	$-\infty$	-3		3		$+\infty$
$f'(x)$	—	‖	—	‖	—	
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$	

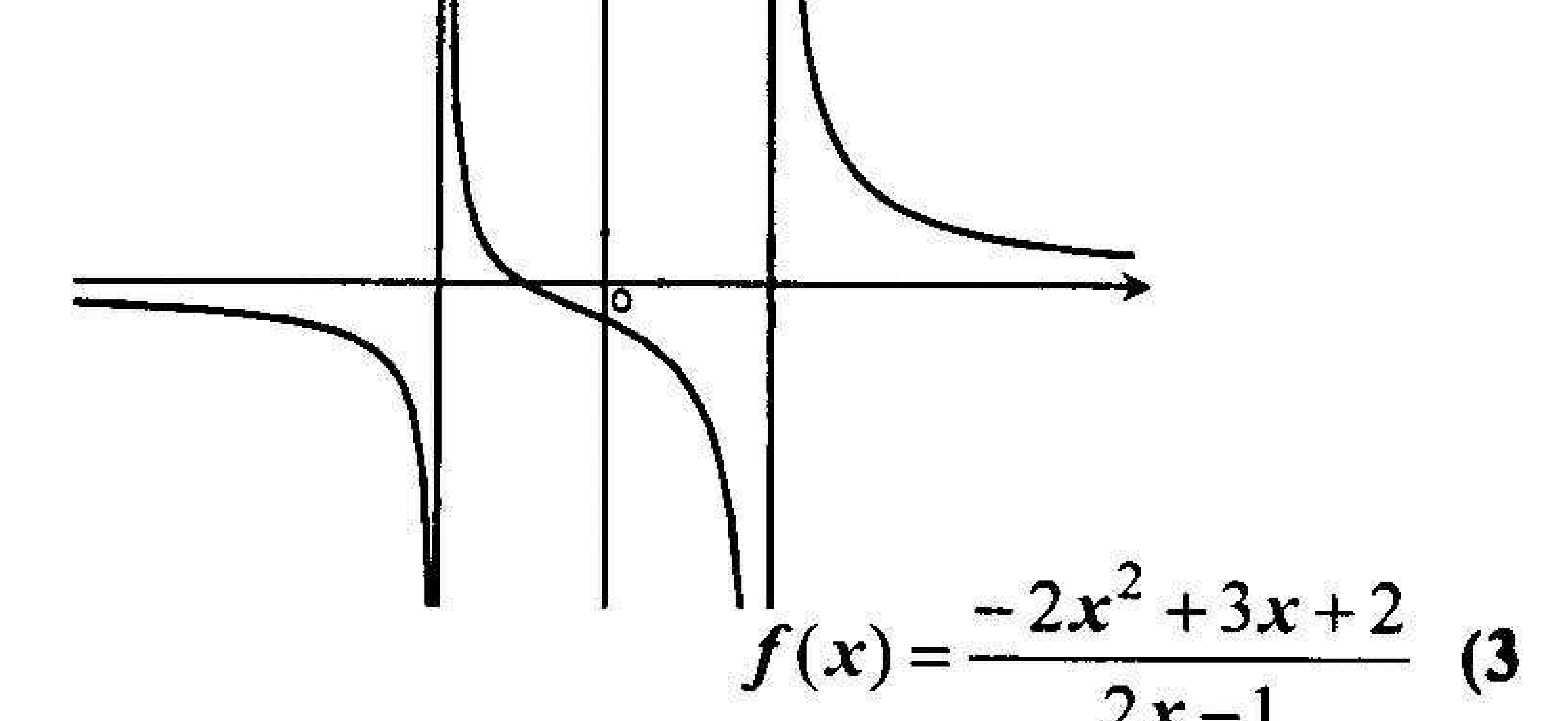
الفروع اللانهائية :

- المستقيمان اللذان معادلتهما $x = -3$ و $x = 3$ مقاربان للمنحني
- المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ هو مستقيم مقارب للمنحني

في جوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$

المنحني :





3) $$f(x) = \frac{-2x^2 + 3x + 2}{2x - 1}$$

<u>مجموعة التعريف</u> : $D_f = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

<u>حساب النهايات</u> :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1/2} f(x) = -\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1/2} f(x) = +\infty$

<u>حساب المشتق</u> : من أجل كل $x \in D_f$: $f'(x) = \dfrac{-4x^2 + 4x - 7}{(2x-1)^2}$

<u>جدول التغيرات</u> :

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow -\infty$

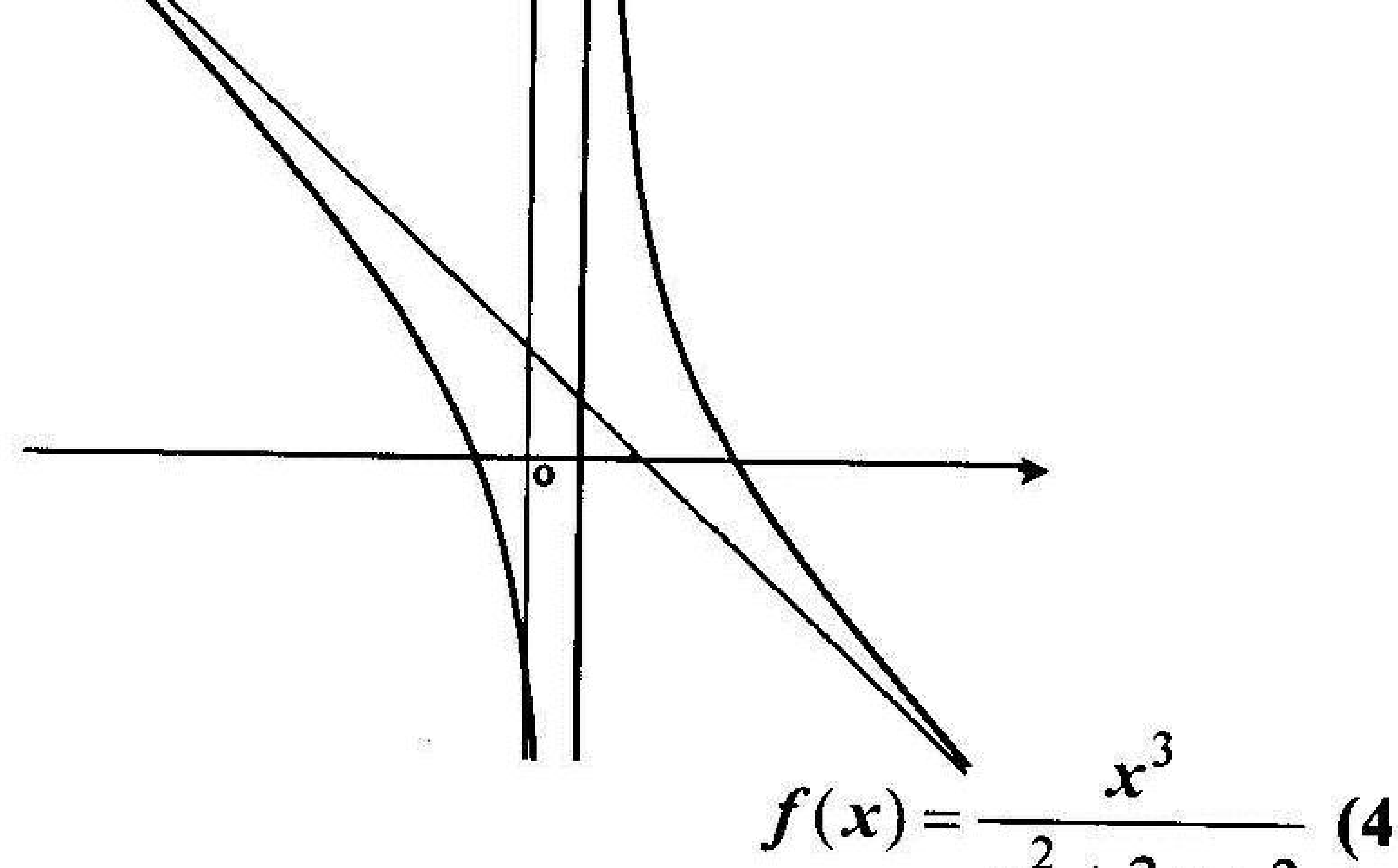
الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $x = \frac{1}{2}$ هو مستقيم مقارب للمنحني

- المستقيم ذوالمعادلة $y = -x + 1$ هومستقيم مقارب للمنحني فيجوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$



المنحني :



4) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 3x + 3}$

مجموعة التعريف : $D_f =]-\infty, \ +\infty[$

حساب النهايات : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$: $f'(x) = \dfrac{x^2(x+3)^2}{\left(x^2 + 3x + 3\right)^2}$

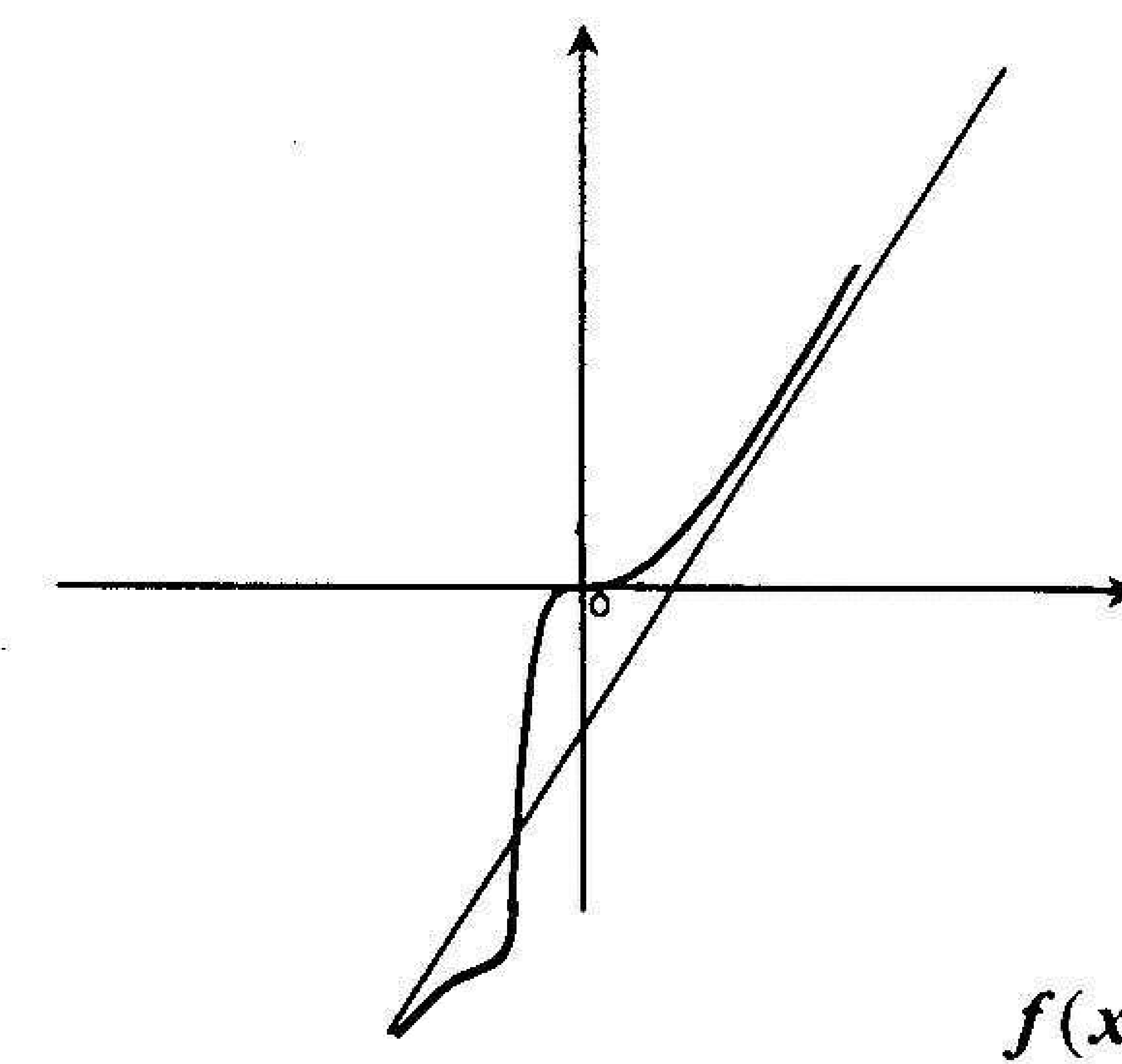
جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذوالمعادلة $y = x - 3$ هومستقيم مقارب للمنحني في جوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$

المنحني :



5) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{(x+1)^2}$

مجموعة التعريف : $D_f =]-\infty, \ -1[\cup]-1, \ +\infty[$

حساب النهايات :

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$: $f'(x) = \dfrac{x(x^2 + 3x + 4)}{(x+1)^3}$

جدول التغيرات :

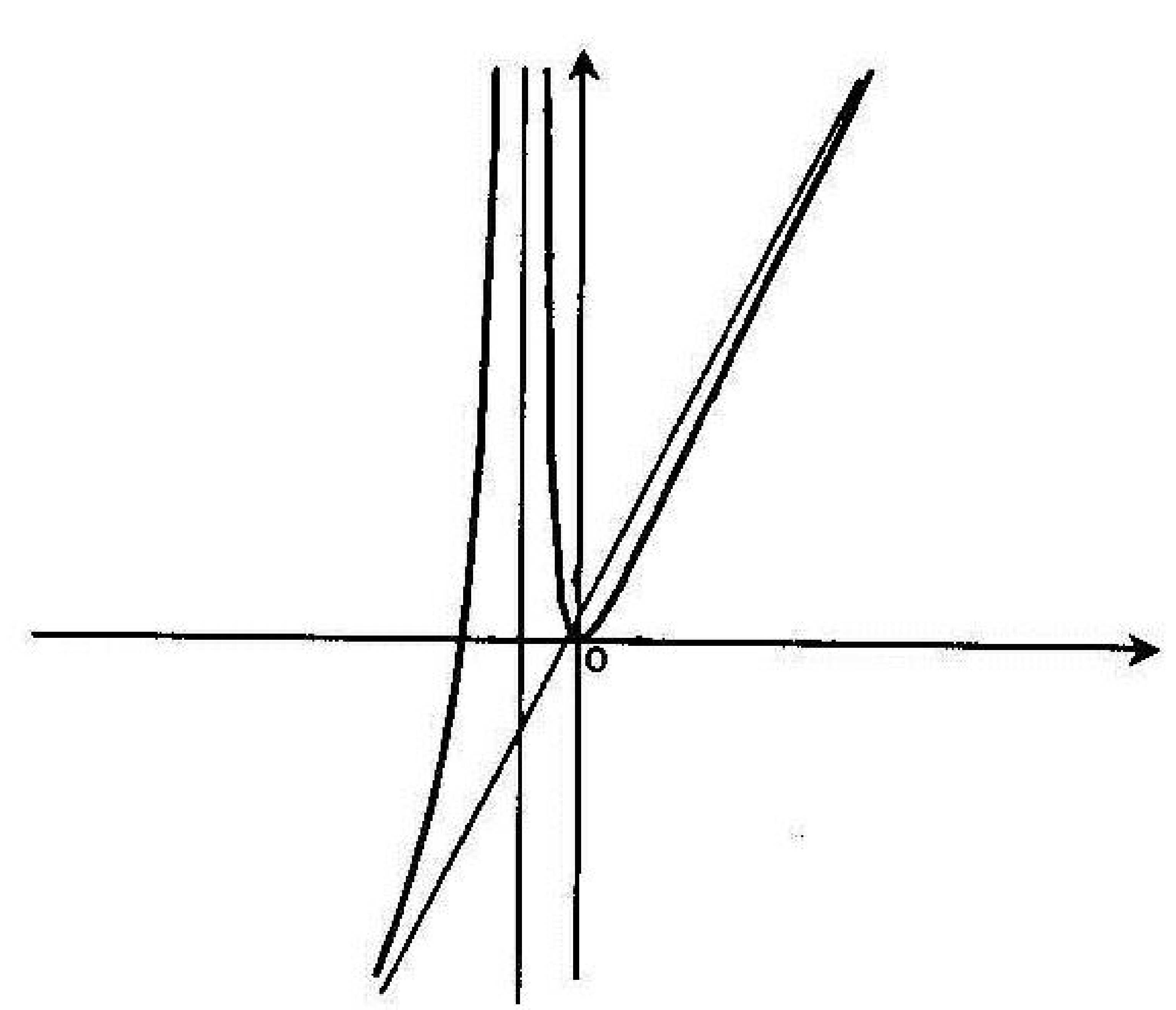
x	$-\infty$ $\qquad$ -1 $\qquad$ 0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$ ‖ $-$ 0 $+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$ ‖ $+\infty$ ↘ 0 ↗ $+\infty$

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ هو مستقيم مقارب للمنحني

- المستقيم ذو المعادلة $y=x$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$

المنحني :



6) $f(x)=2x+3-\frac{1}{(x+1)^2}$

مجموعة التعريف : $D_f=]-\infty,\ -1[\cup]-1,\ +\infty[$

حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-1} f(x)=-\infty$

حساب المشتق : من أجل كل $x\in D_f$: $f'(x)=\frac{2(x+2)(x^2+x+1)}{(x+1)^3}$

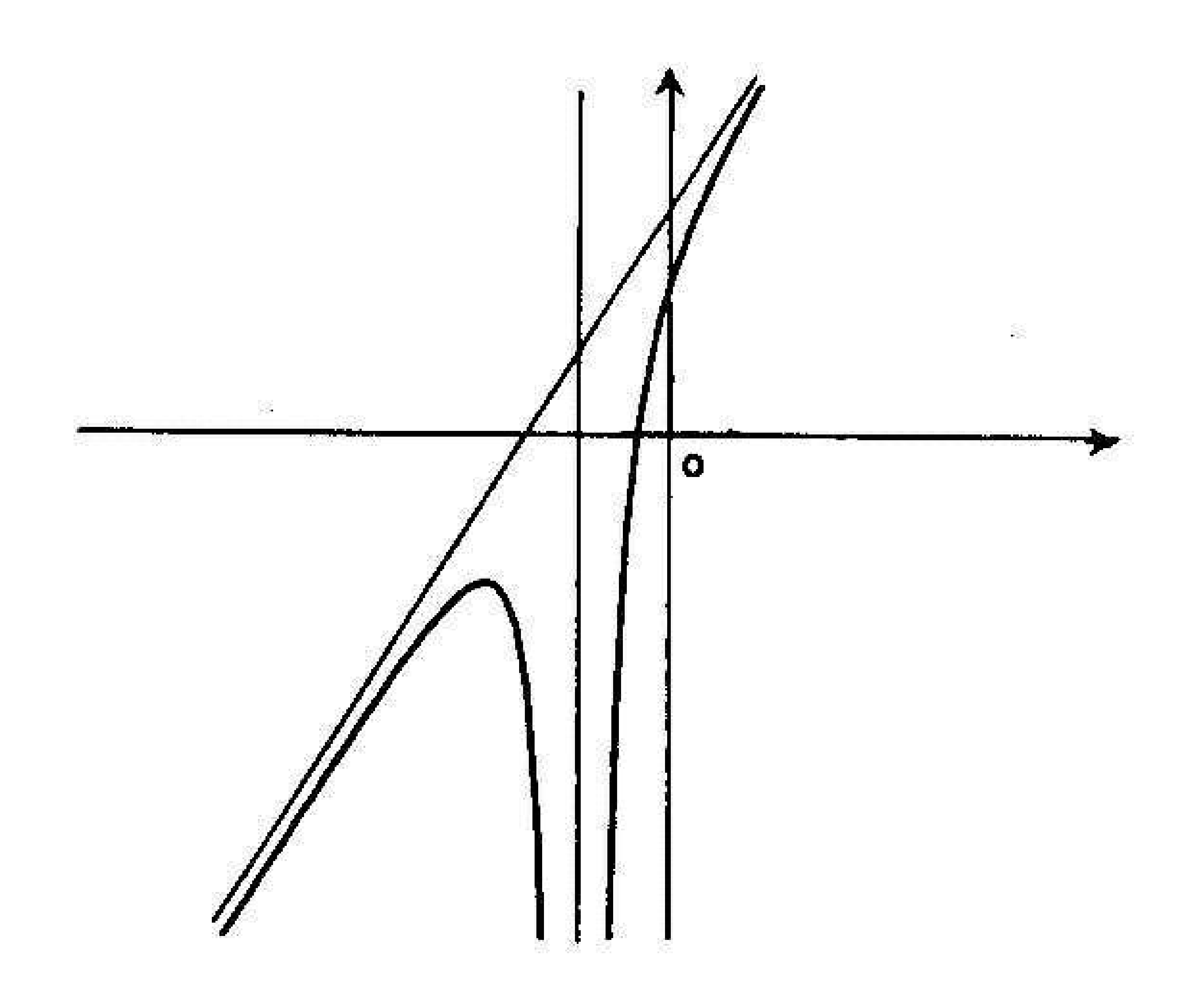
جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗		-2	↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

الفروع اللانهائية :

- **المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ هو مستقيم مقارب للمنحني**
- **المستقيم ذوالمعادلة $y = 2x + 3$ هو مقارب للمنحني في جوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$**

المنحني :





مسـائـل محلولـة

مسألة 1

I. لتكن الدالة f ذات المتغير الحقيقي x و المعرفة بـ : $f(x)=\dfrac{-x^2+2x+11}{2\left(x^2-2x-3\right)}$.

نسمي (c) الممثل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس .

1- أ) أحسب $f(+2)$, $f(+1)$, $f(0)$. ب) أدرس تغيرات الدالة f .

2- أ) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c). ب) أدرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم المقارب الأفقي (Δ). جـ) برهن بأن المستقيم $x=1$ هو محور تناظر للمنحني (c). 3) أنشئ المنحني (c) . 4- أ) عين العددين الحقيقيين α و β حيث من أجل كل $x\in D_f$:

$$\frac{1}{x^2-2x-3}=\frac{\alpha}{x+1}+\frac{\beta}{x-3}$$

ب) استنتج على المجال $]3;+\infty[$ دالة أصلية للدالة : $x\to\dfrac{1}{x^2-2x-3}$.

ج) أحسب المساحة المحددة بالمنحني (c) والمستقيمات : (Δ) ، $x=5$, $x=4$.

II. لتكن الدالة g المعرفة بـ : $g(x)=\dfrac{-x^2+2x+11}{2\left(\left|x^2-2x\right|-3\right)}$.

1- أ) عين مجموعة تعريف الدالة g . ب) أكتب $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة .

2- أ) أحسب $g'(x)$ على المجال $]0;2[$. ب) استنتج تغيرات الدالة g على مجموعة تعريفها .

الحل

I. 1 -أ) حساب $f(+2)$, $f(+1)$, $f(0)$

$$f(0)=-\frac{11}{6}\quad,\quad f(+1)=-\frac{3}{2}\quad,\quad f(+2)=-\frac{11}{6}$$

ب) دراسة تغيرات الدالة f

- مجموعة تعريف : تكون f معرفة إذا كان $x^2-2x-3\neq 0$ ومنه : $x\neq -1$ و $x\neq 3$

إذن : $D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;3[\cup]3;+\infty[$

- **حساب النهايت :**

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = -\frac{1}{2} \ , \lim_{x \xrightarrow{<} -1} f(x) = +\infty \ , \lim_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 3} f(x) = -\infty \quad , \lim_{x \xrightarrow{>} 3} f(x) = +\infty$$

حساب المشتق ودراسة إشارته :

من أجل كل $x \in D_f$ لدينا : $f'(x) = \dfrac{8(1-x)}{(x^2-2x-3)^2}$

جدول تغيرات :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	0	−	‖	−	
$f(x)$	-1/2 ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-3/2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1/2

2- أ) دراسة الفروع اللانهائية للمنحني (c)

المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=-1$ و $x=3$ هما مستقيمان مقاربين للمنحني (c).

المستقيم ذي المعادلة $y=-\frac{1}{2}$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c) في جوار $+\infty$ و $-\infty$.

ب) دراسة وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم المقارب الأفقي (Δ)

$$f(x)-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{-x^2+2x+11}{2(x^2-2x-3)}+\frac{1}{2}=\frac{4}{x^2-2x-3}.$$

إذن وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) تتعلق بإشارة x^2-2x-3.

$x^2-2x-3>0$ من أجل $x\in]-\infty;-1[\cup]3;+\infty[$ ، إذن على هذا المجال (c) **فوق** (Δ). من أجل $x\in]-1;3[$ لدينا $x^2-2x-3<0$ ويكون على هذا **المجال** (c) تحت (Δ).

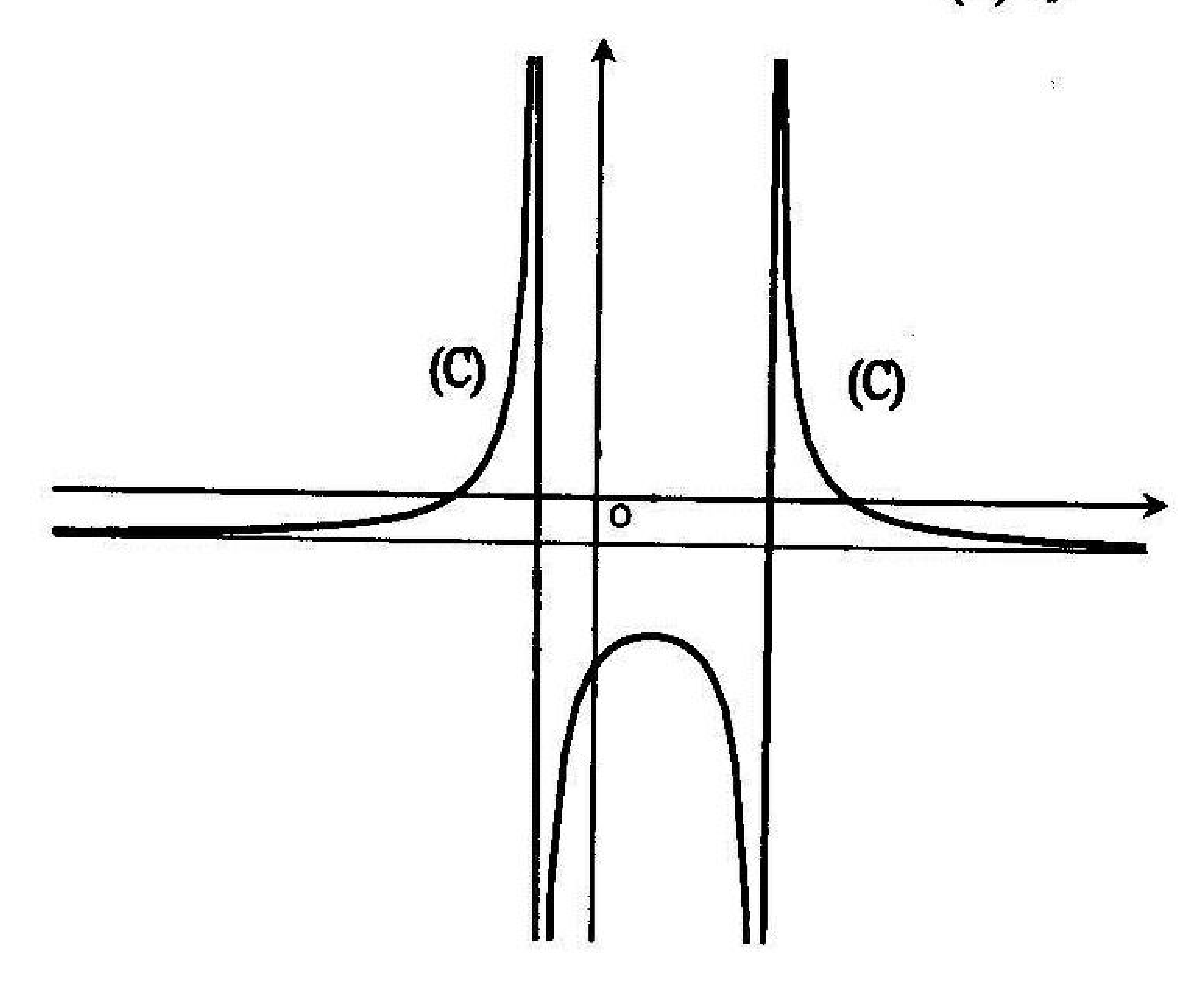
جـ) البرهان على أن المستقيم $x=1$ هو محور تناظر للمنحني (c)

$x=\alpha$ محور تناظر للمنحني (c) للدالة f يعني $f(2\alpha-x)=f(x)$.

$$f(2-x)=\frac{-(2-x)^2+2(2-x)+11}{2\left[(2-x)^2-2(2-x)-3\right]}=\frac{-x^2+2x+11}{2(x^2-2x-3)}=f(x)$$

إذن المستقيم $x=1$ هو محور تناظر للمنحني (c).

3) إنشاء المنحني (c)



4- أ) تعيين العددين الحقيقيين α و β

من أجل كل $x\in D_f$:

$$\frac{1}{x^2-2x-3}=\frac{\alpha}{x+1}+\frac{\beta}{x-3}=\frac{\alpha(x-3)+\beta(x+1)}{(x+1)(x-3)}=$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)x+\beta-3\alpha}{x^2-2x-3}$$

بالمطابقة نجد : $\alpha+\beta=0$ و $\beta-3\alpha=1$ ومنه : $\alpha=-\frac{1}{4}$ و $\beta=\frac{1}{4}$

ب)تعيين على المجال $]3;+\infty[$ دالة أصلية للدالة : $x \to \frac{1}{x^2-2x-3}$

$$\int \frac{1}{x^2-2x-3}dx = -\frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-3}dx =$$
$$= -\frac{1}{4}\ln(x+1) + \frac{1}{4}\ln(x-3) + c$$

جـ) حساب المساحة المحددة بالمنحني والمستقيات $x = 4$ و $x = 5$ و (Δ)

$$S = \int_4^5 \left[f(x) - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]dx = \int_4^5 \frac{4}{x^2-2x-3}dx = 4\int_4^5 \frac{1}{x^2-2x-3}dx$$
$$= \left[\ln(x-3) - \ln(x+1)\right]_4^5 = \left[\ln\frac{x-3}{x+1}\right]_4^5 = \ln\frac{5}{3}(u.a)$$

II. 1- أ) تعيين مجموعة تعريف الدالة g

تكون الدالة g غير معرفة إذا كان $\left|x^2-2x\right|-3=0$ ومنه :

$$\begin{cases} x^2-2x-3=0* \; ; x \in]-\infty;0] \cup]2;+\infty[\\ -x^2+2x-3=0** \; ; x \in]0;2[\end{cases}$$

المعادلة * تقبل حلين $x = -1$ و $x = 3$ أما المعادلة ** ليست لها حلول إذن مجموعة تعريف الدالة g هي : $D_g =]-\infty;-1[\cup]-1;3[\cup]3;+\infty[$

ب) كتابة $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة

من أجل $x \in]-\infty;0] \cup [2;+\infty[$ لدينا : $g(x) = \frac{-x^2+2x+11}{2(x^2-2x-3)} = f(x)$

من أجل $x \in]0;2[$ لدينا : $g(x) = \frac{-x^2+2x+11}{2(-x^2+2x-3)}$

2- أ) حساب $g'(x)$ على المجال $]0;2[$

$$g'(x) = \frac{(-2x+2)\times 2(-x^2+2x-3) - 2(-2x+2)(-x^2+2x+11)}{4(-x^2+2x-3)^2} =$$

$$= \frac{14(x-1)}{(-x^2+2x-3)^2}$$

ب) جدول تغيرات الدالة g

x	$-\infty$	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$g'(x)$	+	‖ +	‖ −	0 +	‖ −	‖ −	
$g(x)$	-1/2 ↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$ ↗	-11/6 ↘	-3 ↗	-11/6 ↘ $-\infty$	‖ $+\infty$ ↘	-1/2

مسألة 2

لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = |x+2| + \frac{4x}{x^2-4}$ وليكن (c) التمثيل البياني لها في معلم متعامد ومتجانس . 1- أ) أحسب $f(0)$, $f(-3)$, $f(-4)$

ب) أدرس تغيرات الدالة f .

2- أ) برهن على وجود عدد حقيقي $\alpha \in]-4;-3[$ حيث $f(\alpha) = 0$.

ب) برهن بأن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد في المجال $]-2;2[$

3- أ) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c). ب) أوجد معادلة المماس (Δ) للمنحني (c) عند النقطة ذات الفاصلة $x = 0$. جـ) أدرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) على المجال $]-2;2[$ وفسر هندسيا النتيجة . 4) أنشئ المنحني (c)

5) أحسب مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحني (c) والمستقيمات التي معادلاتها:

$$y = x+2 \quad , \quad x = 4 \quad , \quad x = 3$$

الحل

1- أ) حساب $f(0)$, $f(-3)$, $f(-4)$

$$f(0) = 2 \quad , \quad f(-3) = -\frac{7}{5} \quad , \quad f(-4) = \frac{2}{3}$$

ب)دراسة تغيرات الدالة f

<u>مجموعة تعريف:</u> $D_f =]-\infty;-2[\cup]-2;2[\cup]2;+\infty[$

<u>حساب النهايات</u> :

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \xrightarrow{<} -2} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \xrightarrow{>} -2} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 2} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \xrightarrow{>} 2} f(x) = +\infty$$

<u>حساب المشتق ودراسة إشارته</u> :

- على المجال $]-\infty;-2[$ لدينا : $f(x) = -(x+2) + \dfrac{4}{x^2-4}$

ومنه من أجل $x \in]-\infty;-2[$ لدينا : $f'(x) = -1 - \dfrac{4x^2+16}{(x^2-4)^2} < 0$

- على المجال $]-2;2[\cup]2;+\infty[$ لدينا : $f(x) = (x+2) + \dfrac{4}{x^2-4}$

إذن من أجل $x \in]-2;2[\cup]2;+\infty[$ لدينا : $f'(x) = \dfrac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$

$f'(x) = 0$ يكافئ $x^2(x^2-12) = 0$ ومنه $x = 0$ أو $x = 2\sqrt{3}$

$f'(x) < 0$ من أجل $x \in]-2;2[\cup]2;2\sqrt{3}[$

$f'(x) > 0$ من أجل $x \in]2\sqrt{3};+\infty[$

<u>جدول تغيرات</u> :

x	$-\infty$		-2		2		$2\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘		$2+3\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

2- أ) البرهان على وجود عدد حقيقي $\alpha \in]-4;-3[$ حيث $f(\alpha) = 0$

على المجال $[-4;-3]$ الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما و $f(-3) = -7/5$

$f(-4) = 2/3$ والعدد 0 ينتمي إلى المجال $]-7/5; 2/3[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة
يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha \in]-4; -3[$ حيث $f(\alpha) = 0$

ب) البرهان على أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد في المجال $]-2; 2[$

الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-2; 2[$ و $\lim_{x \xrightarrow{>} -2} f(x) = +\infty$
و $\lim_{x \xrightarrow{<} 2} f(x) = -\infty$ والعدد 0 ينتمي إلى المجال $]-\infty; +\infty[$ إذن حسب مبرهنة القيم
المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد على المجال $]-2; 2[$

3- أ) دراسة الفروع اللانهائية للمنحني (c)

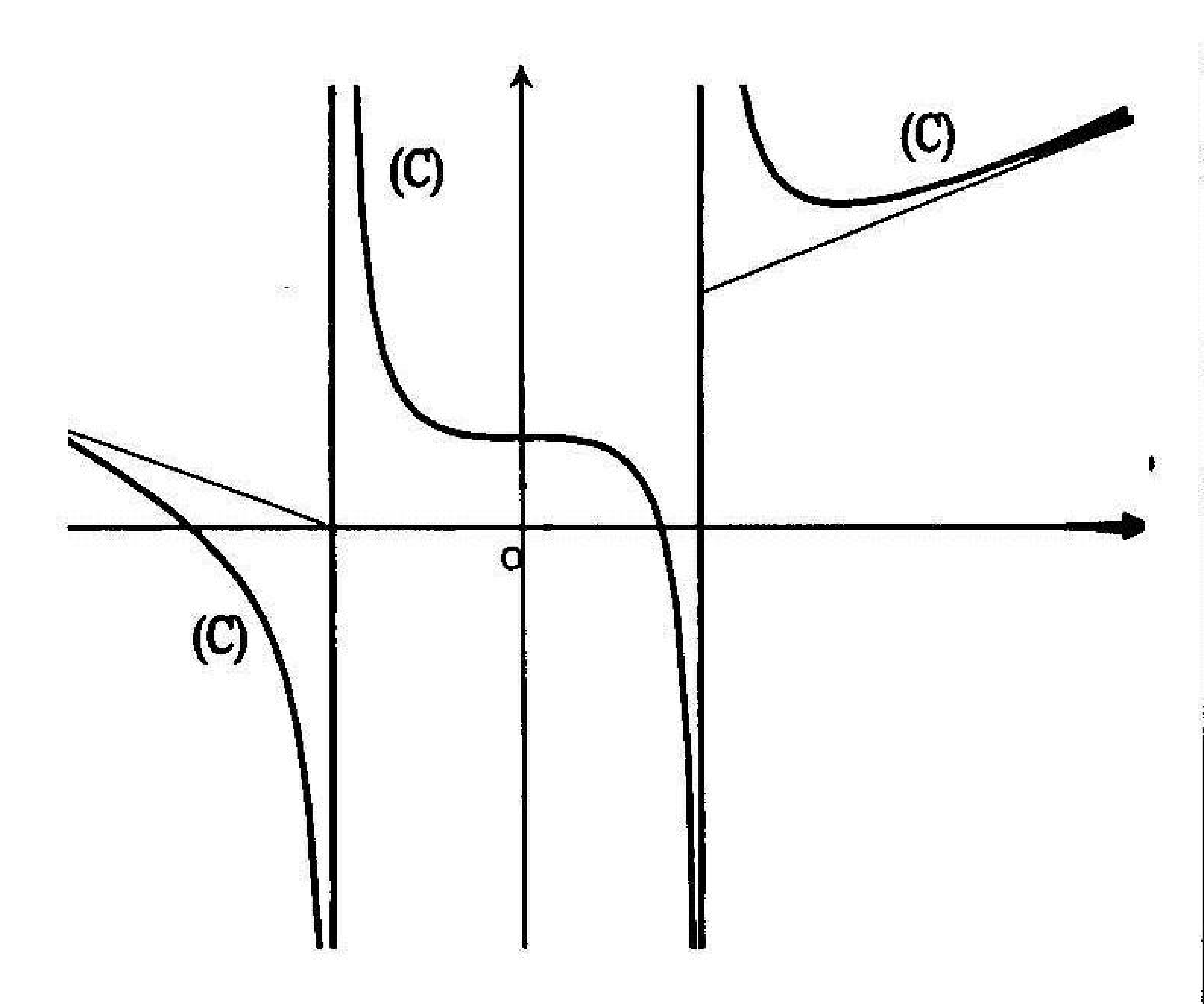
المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = -2$ و $x = +2$ هما مستقيمان مقاربان للمنحني (c)
$\lim_{|x| \to +\infty} [f(x) - |x+2|] = 0$ إذن المنحني (c) يقبل في جوار $(-\infty)$ المستقيم ذي
المعادلة $y = -x - 2$ مستقيم مقارب كما يقبل في جوار $(+\infty)$ المستقيم ذي المعادلة
$y = x + 2$ مستقيم مقارب

ب) معادلة المماس (Δ) للمنحني (c) عند النقطة $x = 0$
$y = f'(0)(x-0) + f(0) = 0 \times x + 2 = 2$.

جـ) دراسة وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المماس (Δ) على المجال $]-2; 2[$

$f(x) - 2 = x + 2 + \frac{4x}{x^2-4} = \frac{x^3}{x^2-4} = x^2 \times \frac{x}{x^2-4}$. إشارة هذا الفرق تتعلق
بإشارة $\frac{x}{x^2-4}$. من أجل $x \in]-2; 0[$ لدينا $f(x) - 2 > 0$ ويكون المنحني (c)
في هذا المجال فوق المماس (Δ). $f(x) - 2 < 0$ من أجل $x \in]0; 2[$ ويكون
المنحني (c) في هذا المجال تحت المماس (Δ). نستنتج من هذه الدراسة أن
المماس (Δ) للمنحني (c) عند النقطة $x = 0$ يقطع المنحني (c) وهذا يعني
أن النقطة $(0; 2)$ هي نقطة انعطاف للمنحني (c).

4) إنشاء المنحني (c) :



5) حساب المساحة المحددة بالمنحني (c) والمستقيمات التي معادلاتها :

$x = 3$ و $x = 4$ و $y = x + 2$

$$S = \int_3^4 f(x) - (x+2)\,dx = \int_3^4 \frac{4x}{x^2-4}\,dx = 2\int_3^4 \frac{2x}{x^2-4}\,dx =$$

$$= 2\left[\ln\left(x^2-4\right)\right]_3^4 = 2\left(\ln 12 - \ln 5\right) = 2\ln\frac{12}{5}\ (u.a)$$

مسالة 3

I. لتكن f الدالة العددية المعرفة بـ $f(x) = \dfrac{2x^3+4x^2+2x+1}{2(x+1)^2}$ وليكن (c) ممثلها البياني في معلم متعامد ومتجانس .

1) أوجد الأعداد الحقيقية a , b , c حيث من أجل $x \neq -1$ فإن x :

$.f(x)=ax+b+\frac{c}{2(x+1)^2}$ (2 أدرس تغيرات الدالة f

3) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c) وحدد وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل (Δ).

4- أ) برهن أن المنحني (c) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة $.x_0 \in \left]-2;-\frac{3}{2}\right[$

ب) برهن بأن المنحني (c) يقبل في نقطة يطلب تعيينها مماسا موازيا للمستقيم (D) ذو المعادلة $.7x+y+1=0$ (5 أنشئ المنحني (c).

6) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m حلول المعادلة :

$.\ 2x^3+2(2-m)x^2+(1-2m)(2x+1)=0$

II. نعتبر الدالة g المعرفة بـ : $g(x)=\frac{2x^2(|x|+2)+2|x|+1}{2(|x|+1)^2}$

1) برهن بأن الدالة g زوجية . 2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة g عند النقطة $x=0$

3) باستعمال المنحني (c) أشرح كيف يمكن إ نشاء المنحني (Γ) للدالة g.

الحل

I. 1) تعيين الأعداد a,b,c

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{2(x+1)^2}=$$

$$=\frac{2ax^3+(4a+2b)x^2+(2a+4b)x+2b+c}{2(x+1)^2}=\frac{2x^3+4x^2+2x+1}{2(x+1)^2}$$

بالمطابقة نجد : $a=1$ و $4a+2b=4$ و $2a+4b=2$ و $2b+c=1$

ومنه : $c=1\ ,\ b=0\ ,\ a=1$ إذن : $f(x)=x+\frac{1}{2(x+1)^2}$

2) دراسة تغيرات الدالة f

<u>مجموعة تعريف</u> : $D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

<u>حساب النهايات</u> : $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$$

حساب المشتق ودراسة إشارته : من أجل كل $x \in D_f$ فإن :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^3} = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x}{(x+1)^3} = \frac{(x^2+3x+3)}{(x+1)^2} \times \frac{x}{x+1}$$

من أجل كل $x \in D_f$ فإن : $x^2 + 3x + 3 > 0$ $(\Delta < 0)$ إذن إشارة $f'(x)$ هي

إشارة $\frac{x}{x+1}$ ومنه $f'(x) = 0$ لما $x = 0$. $f'(x) < 0$ من أجل $x \in]-1;0[$

و $f'(x) > 0$ من أجل $x \in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$

جدول تغيرات :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗		$+\infty$ || $+\infty$	↘	$1/2$	↗	$+\infty$

3) دراسة الفروع اللانهائية للمنحني (c) وتحديد وضعية (c) بالنسبة إلى (Δ)

المستقيم $x = -1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c)

$\lim_{|x| \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{1}{2(x+1)^2} = 0$ ، إذن المستقيم (Δ) ذي

المعادلة $y = x$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c) في جوار $(-\infty)$ وفي جوار $(+\infty)$.

$f(x) - x = \frac{1}{2(x+1)^2} > 0$ إذن من أجل كل $x \in D_f$ يكون (c) فوق (Δ)

4- أ) البرهان على أن (c) يقطع $(x'x)$ في نقطة وحيدة $x_0 \in]-2;-3/2[$

على المجال $]-\infty;-1[$ الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما فهي تقابل للمجال $]-\infty;-1[$

على المجال $]-\infty;+\infty[$ إذن في المجال $]-\infty;-1[$ المنحني (c) يقطع في نقطة وحيدة

وبما أن $f\left(-2\right)\times f\left(-3/2\right)<0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة فتكون نقطة تقاطع (c) مع $(x'x)$ هي النقطة ذات الفاصلة x_0 حيث $x_0\in\left]-2;-3/2\right[$.

على المجال $\left]-1;+\infty\right[$ لدينا $f\left(x\right)>0$ (من جدول تغيرات) وبالتالي على هذا المجال المنحني (c) لايقطع $(x'x)$.

ب) البرهان على أن (c) يقبل في نقطة يطلب تعيينها مماسا يوازي (D)

المماس للمنحني (c) عند النقطة x_0 يوازي المستقيم (D) ذو المعادلة

$7x+y+1=0$ يعني $f'\left(x_0\right)=-7$ ومنه $1-\dfrac{1}{\left(x+1\right)^3}=-7$

ومنه $\dfrac{1}{\left(x+1\right)^3}=8$ و منه $\left(x+1\right)^3=\dfrac{1}{8}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$ و منه $x_0=-\dfrac{1}{2}$

إذن المنحني (c) يقبل في النقطة $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ مماسا يوازي المستقيم (D)

5) إنشاء المنحنى (c)

(Γ) و (C)

(Γ)

O

(C)

6) المناقشة بيانيا وحسب قيم الوسيط m لحلول المعادلة :

ومنه $2x^3+2(2-m)x^2+(1-2m)(2x+1)=0$

ومنه $2x^3+4x^2+2x+1-2mx^2-4mx-2m=0$:

ومنه $2x^3+4x^2+2x+1=2(x^2+2x+1)$ $\dfrac{2x^3+4x^2+2x+1}{2(x^2+2x+1)}=m$

ومنه $\dfrac{2x^3+4x^2+2x+1}{2(x+1)^2}=f(x)=m$ من التمثيل البياني للدالة f نلاحظ أن :

إذا كان $m\in]-\infty;1/2[$ المعادلة المعطاة تقبل حل وحيد

إذا كان $m=1/2$ المعادلة تقبل حلين

إذا كان $m\in]1/2;+\infty[$ المعادلة المعطاة تقبل ثلاثة حلول .

II. 1- البرهان على أن الدالة g زوجية

$$g(-x)=\frac{2x^2(|-x|+2)+2|-x|+1}{2(|-x|+1)^2}=\frac{2x^2(|x|+2)+2|x|+1}{2(|x|+1)^2}=g(x)$$

2) دراسة قابلية الاشتقاق الدالة g عند النقطة $x=0$

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{-2x^3+4x^2-2x+1}{2(-x+1)^2} & ; \ x<0\\[2mm] \dfrac{2x^3+4x^2+2x+1}{2(x+1)^2}=f(x) & ; \ x>0\end{cases}$$

مشتق الدالة g على يسار $x=0$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{\dfrac{-2x^3+4x^2-2x+1}{2(-x+1)^2}-\dfrac{1}{2}}{x}$$

$$=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{-2x^2+3x}{2(-x+1)^2}=0$$

إذن فالدالة g قابلة الاشتقاق على يسار 0

مشتق الدالة g على يمين $x=0$

$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{2x^2+3x}{2(x+1)^2} = 0$ ، إذن فالدالة g قابلة الاشتقاق على يمين $x = 0$ ، بما أن المشتق على اليمين يساوي المشتق على اليسار فالدالة g قابلة الاشتقاق عند النقطة $x = 0$.

3)شرح إنشاء المنحني (Γ) للدالة g باستعمال المنحني (c)

على المجال $]0;+\infty[$ لدينا $g(x) = f(x)$ ،إذن على هذا المجال (c) و (Γ) متطابقان وبما أن الدالة g زوجية فيكون منحنيها في المجال $]-\infty;0[$ يناظر بالنسبة إلى محور التراتيب المنحني (Γ) في المجال $]0;+\infty[$.

دوال ناطقة مقترحة للدراسة

ادرس دراسة كاملة (تغيرات ، الفروع اللانهائية ، رسم المنحني) لكل من الدوال الآتي :

$$1)\ f(x)=\frac{x-3}{x+2}+\frac{20}{x} \quad , \quad 2)\ f(x)=\frac{2x^2+x-13}{x^2-x-2}$$

$$3)\ f(x)=\frac{x^2-5x-2}{2(x+1)} \quad , \quad 4)\ f(x)=\frac{-x^2+2x+11}{2(x^2-2x-3)}$$

$$5)\ f(x)=\frac{-2x^2+3x+2}{2x-1} \quad , \quad 6)\ f(x)=\frac{2x+1}{4x^2+3|x|-1}$$

$$7)\ f(x)=\frac{|4x^2-x-3|}{2x^2+2x-9} \quad , \quad 8)\ f(x)=\frac{x^2+x-1}{|x-2|}$$

$$9)\ f(x)=\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} \quad , \quad 10)\ f(x)=x-5+\frac{19}{x}+\frac{15}{x^3}$$

$$11)\ f(x)=\frac{x^3+3x^2+10x+5}{(x+1)^2} \quad , \quad 12)\ f(x)=\frac{x^4-x^2+2}{(x+1)^2}$$

$$13)\ f(x)=\frac{x^2+7|x+1|}{2x+|x-6|} \quad , \quad 14)\ f(x)=\frac{x^4}{x^2-x-6}$$

$$15)\ f(x)=\frac{(x-2)^2}{(x+1)^4} \quad , \quad 16)\ f(x)=\frac{x^3-5x-5}{x^2-2x-2}$$

$$17)\ f(x)=\frac{x^4-x^2+2}{(x+1)^2} \quad , \quad 18)\ f(x)=\frac{3x^4+3x^3-2x^2}{x-1}$$

$$19)\ f(x)=\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2} \quad , \quad 20)\ f(x)=\frac{x^3+2x^2+5x+1}{x^3-4x^2+5x-2}$$

مسائل مقترحة للحل

مسألة 1

I. نعتبر الدالة العددية f المعرفة بـ : $f(x)=\dfrac{3x^2-x-2}{x^2-x-2}$ وليكن (c) منحنيها البياني في معلم متعامد ومتجانس .

1) – أ) أحسب $f(1)$, $f(0)$, $f(-4)$. ب) أدرس تغيرات الدالة f

2)-أ) أدرس الفروع اللآ نهائية للمنحني (c). ب) أدرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم المقارب الأفقي . جـ) عين نقاط التقاطع للمنحني (c) مع المحاور.

3) أنشئ المنحني (c) . 4) نقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة : $(3-m)x^2+(m-1)x+2(m-1)=0$

5) – ا) عين الأعداد الحقيقية α , β , γ بحيث مهما يكون x من مجموعة التعريف الدالة f فإن : $f(x)=\alpha+\dfrac{\beta}{x+1}+\dfrac{\lambda}{x-2}$. ب) استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;-1[$. جـ) أحسب $S(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (c) والمستقيمات : $y=3$, $x=\lambda$, $x=-2$ حيث : $-2\prec\lambda\prec-1$

د) أحسب $\lim\limits_{\lambda \xrightarrow{<} -1} S(\lambda)$.

II. لتكن الدالة g المعرفة بـ: $g(x)=\dfrac{3x^2-|x|-2}{x^2-|x|-2}$ .1) برهن بأن الدالة g زوجية

2) أدرس اشتقاق الدالة g عند النقطة $x_0=0$ وفسر هندسيا هذه النتيجة

3) باستعمال المنحني (c) أنشئ المنحني (γ) للدالة g.

مسألة 2

نعتبر الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ وليكن (c) منحنييها البياني في معلم متعا مد ومتجانس . 1) عين الأعداد الحقيقية a , b , c , d بحيث $\forall x\neq 1$

$f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}+\dfrac{d}{(x-1)^2}$ .2) أدرس تغيرات الدالة f

3) - أ) برهن بأن المنحني (c) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) يطلب تعيينه .

ب) أدرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم (D)

4- أ) عين نقاط التقاطع للمنحني (c) مع المحاور ومع المستقيم (D)

ب) أنشئ المنحني (c) . جـ) أكتب معادلة المماس للمنحني (c) عند النقطة $x_0=0$

5- أ) احسب المساحة $S(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (c)، المستقيم (D)

والمستقيمين $x=2$ و $x=\lambda$ حيث $\lambda \succ 2$. ب) أحسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} S(\lambda)$

مسألة 3

I- لتكن الدالة العددية g والمعرفة بـ: $g(x)=\dfrac{ax^2+bx}{2(x-c)^2}$ وليكن (c) منحنيها البياني

1) عين الأعداد الحقيقية a,b,c لكي المنحني (c) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتاهما

$x=1$ و $y=\dfrac{3}{2}$ ويقبل مماسا عند النقطة $x_0=0$ معادلته $y=-2x$

II- لتكن الدالة العددية f والمعرفة بـ: $f(x)=\dfrac{3x^2-4x}{2(x-1)^2}$. 1) أدرس تغيرات الدالة f

2) أ) عين معادلة المماس لـ (c) عند النقطة $x_0=0$ وكذالك عند النقطة $x_1=3/2$.

ب) أدرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم المقارب الأفقي . 3) أنشئ المماسين

والمنحني (c) . 4) ليكن (D_m) المستقيم ذو المعادلة $y=4x+m$ حدد بيانيا عدد

حلول المعادلة $f(x)-4x=m$ حيث : $m\in\mathbb{R}$. 5) لتكن الدالة p المعرفة

بـ: $p(x)=\dfrac{3x^2+4|x|}{2(-|x|-1)^2}$. أ) اثبت أن p دالة زوجية .

ب) اكتب $p(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة . جـ) استنتج بيان الدالة p في نفس المعلم

مسالة 4

لتكن الدالة العددية f المعرفة بـ : $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$

1)عين الأعداد الحقيقية $a\ ,\ b\ ,\ c$ بحيث $f(x)=x+a+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{(x-1)^2}$

2) ادرس تغيرات الدالة f .   3)- ا) برهن بان ا لمنحني (c)للدالة f يقبل مستقيمين مقاربين إ حداهما مائل يطلب إعطاء معادلته.   ب)ادرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل .   4) أنشئ المنحني (c).

5) باستعمال المنحني (c) ، ناقش بيانيا وحسب الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $x^3-(4+m)x^2+2(4+m)x-4-m=0$

6)-أ) α عدد حقيقي أصغر تماما من $\dfrac{2}{3}$. أحسب $S(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي مجموعة النقاط $M(x;y)$ حيث $\begin{cases}\alpha\le x\le\dfrac{2}{3}\\ f(x)\le y\le(x-2)\end{cases}$

ب) احسب $\lim\limits_{\alpha\to-\infty}S(\alpha)$

مسالة 5

لتكن الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=2|x|-2+\dfrac{1}{(x+1)^2}$ وليكن (c) المنحني البياني لها في معلم متعامد ومتجانس.   1)- ا)أدرس اشتقاق الدالة f عند النقطة $x=0$.

ب) فسر هندسيا النتيجة .   2)ادرس تغيرات الدالة f .

3) ادرس الفروع اللاّ نهائية للمنحني (c).

4)-أ) برهن بان المنحني (c) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما α,β حيث :

$-\dfrac{1}{4}<\alpha<-\dfrac{1}{8}$ و $\dfrac{3}{4}<\beta<1$.   ب) أنشئ المنحني (c)

5)احسب المساحة المحددة بالمنحني (c) والمستقيمات التي معادلاتها:

$x=0\ ,\ \ x=2\ ,\ \ y=2x-2$

مسالة 6

لتكن الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x حيث : $f(x)=|x-2|+\dfrac{4}{x+2}$.

ليكن (c) منحني الدالة f في معلم متعامد ومتجانس .

1)- ا) ادرس اشتقاق الدالة f عند النقطة $x_0=2$.   ب) فسر هندسيا النتيجة

2) ادرس تغيرات الدالة f

3) - ا) اكتب معادلة النصفي المماسين للمنحني (c) عند النقطة $x_0=2$

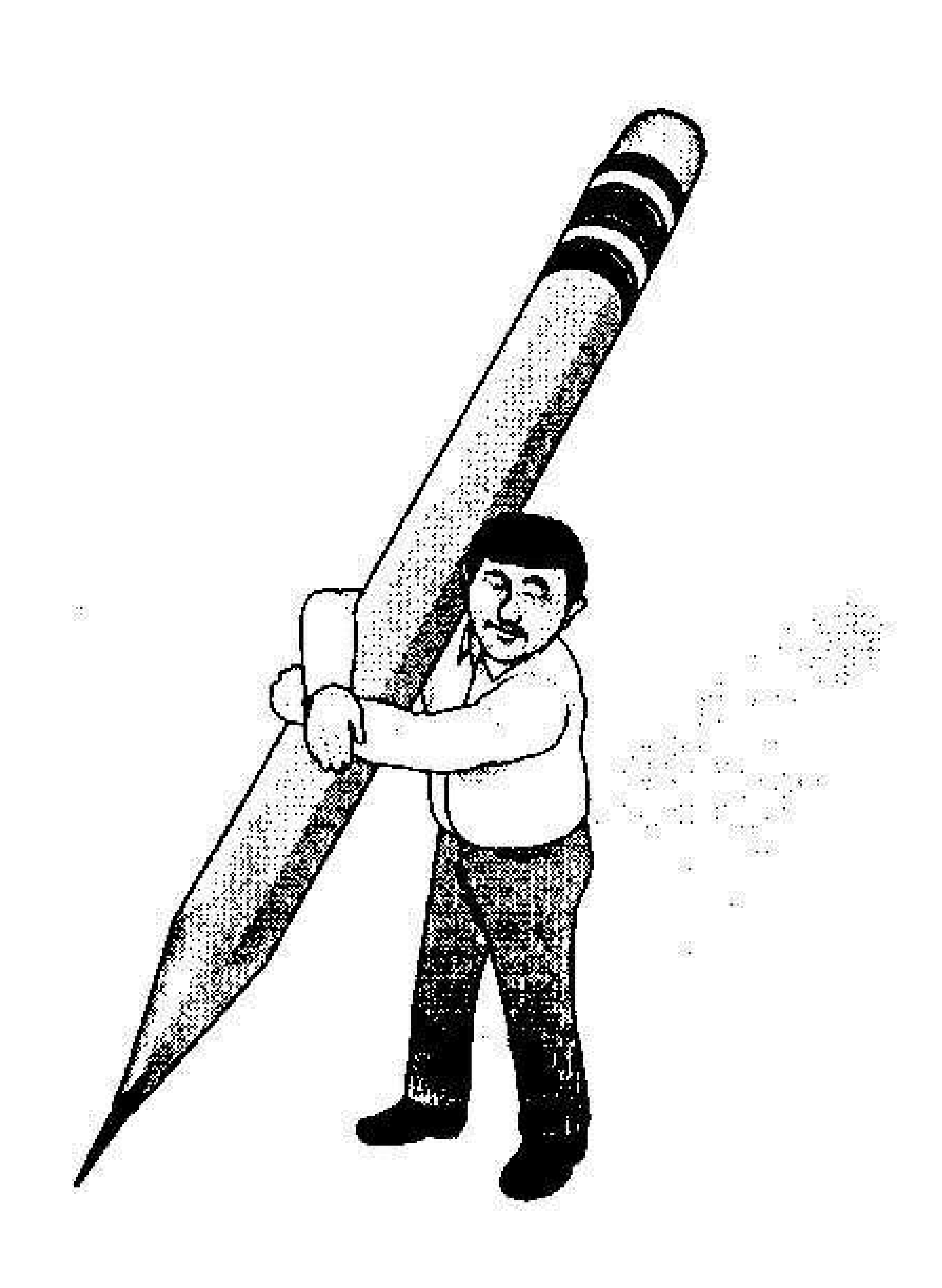
ب) ادرس الفروع اللا نهائية للمنحني (c) واستنتج أن المنحني له مستقيمين مقاربين مائلين (D) و (D') متعامدين .   4) ارسم النصفي المماسين والمنحني (c)

5) ناقش بيانيا وحسب الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x)=-x+m$

6) نعتبر التحويل T_α الذي يرفق بكل نقطة $M(x;y)$ من المستوي النقطة $M'(x';y')$ حيث : $\begin{cases} x'=(\alpha-2)x+(\alpha-1)y-2 \\ y'=(\alpha-1)x-(2-\alpha)y+2 \end{cases}$

ا) ناقش حسب قيم α مجموعة النقاط الصامدة بالتحويل T)

ب) عين معادلة صورة منحني الدالة f بالتحويل $T_1(\alpha=1)$



الـدوال الجـذرية

الدوال الجذرية هي الدوال العددية ذات المتغير الحقيقي x وتحتوي العبارة $\sqrt{f(x)}$.

• الدوال الجذرية من الشكل $x \to \sqrt{f(x)}$

الدالة $x \to \sqrt{f(x)}$ معرفة إذا كان $f(x) \geq 0$، وقابلة الاشتقاق من أجل كل قيمة x_0 من مجموعة تعريفها حيث $f(x_0) \neq 0$ ومشتقها هو معرف بـ: $\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

1)- الدالة : $x \to \sqrt{ax+b}$

هذه الدالة معرفة إذا كان $ax+b \geq 0$ وقابلة الاشتقاق على المجال : $D_f - \left\{\dfrac{-b}{a}\right\}$

ومن أجل كل $x \in D_f - \left\{\dfrac{-b}{a}\right\}$ فإن : $f'(x) = \dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

منحني هذه الدوال يقبل نصف مماس يوازي محور الترتيب عند النقطة $x_0 = \left\{\dfrac{-b}{a}\right\}$

منحني هذه الدوال له فرع قطع مكافئ في إ تجاه محور الفواصل بجوار $(-\infty)$ أو $(+\infty)$ وهذا حسب مجموعة تعريف الدالة

2)- الدالة : $x \to \sqrt{ax^2+bx+c}$

إذا كان $b - 4ac \geq 0$ فتكون مجموعة التعريف الدالة هي:

$D_f =]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ لما $a \succ 0$ و $D_f = [x_1; x_2]$ لما $a \prec 0$

حيث x_1, x_2 هما جذور المعادلة : $ax^2+bx+c=0$

إذا كان $b^2 - 4ac \prec 0$ فتكون مجموعة التعريف الدالة هي $D_f =]-\infty, +\infty[$ لما $a \succ 0$

منحني الدالة يقبل في كل من النقطتين x_0, x_1 مماس يوازي محور الترتيب.

إذا كان $a \succ 0$ منحني هذه الدالة يقبل مستقيمين مقاربين مائلين في جوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$

أمثلة على دراسة الدوال الجذرية

لندرس دراسة كاملة (تغيرات، الفروع اللانهائية، رسم المنحني) لكل من الدوال الآتية :

1) $f(x) = x - \sqrt{2-x}$ 2) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

3) $f(x) = x + \sqrt{x^2+2}$ 4) $f(x) = \sqrt{x^2-x-2}$

5) $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$

الحل

1) $f(x) = x - \sqrt{2-x}$

مجموعة التعريف : $D_f =]-\infty, 2]$

حساب النهايات : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$: $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{2-x}}$

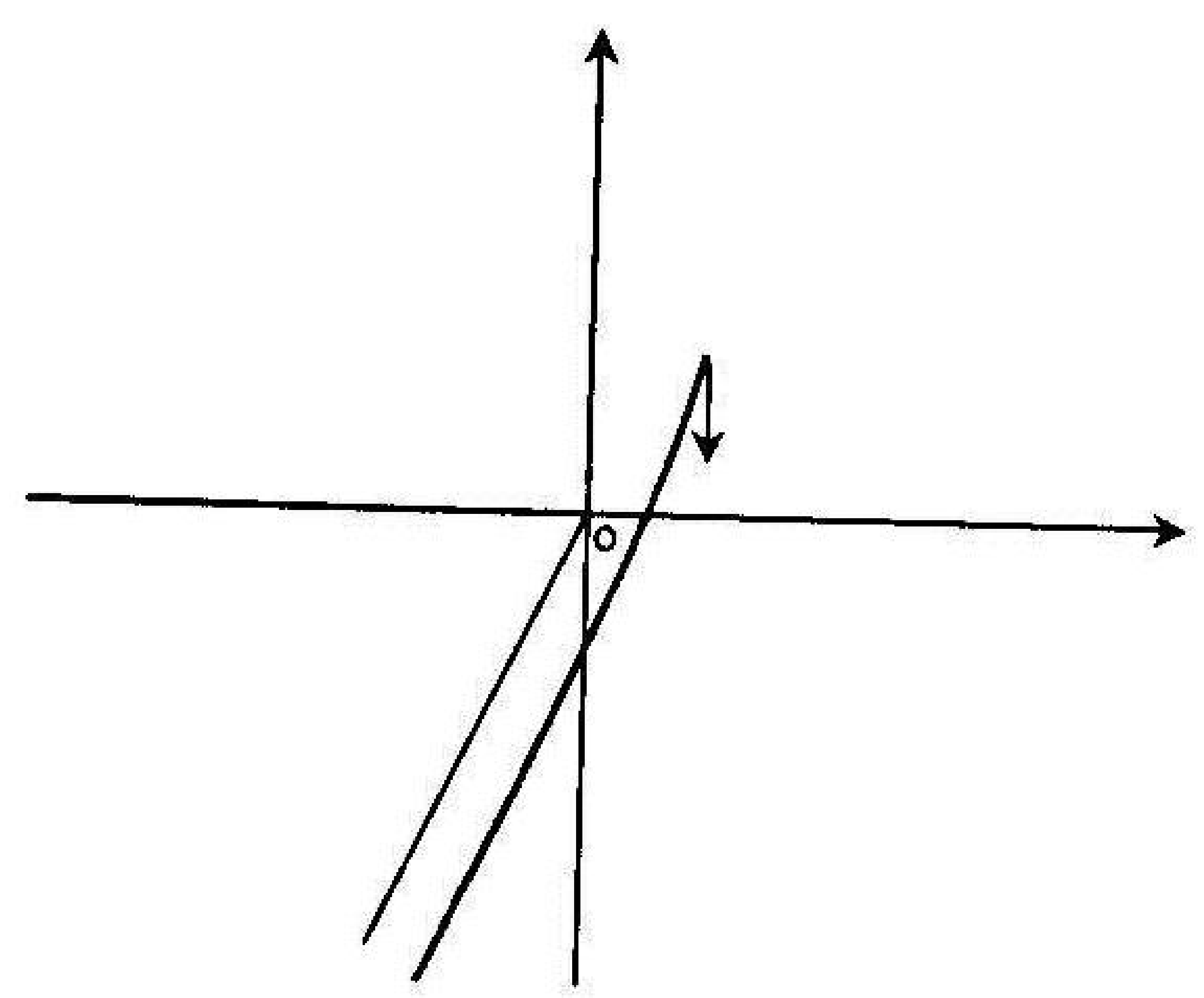
جدول التغيرات :

x	$-\infty$		2
$f'(x)$		$+$	‖
$f(x)$	$-\infty$	↗	2

الفروع اللانهائية :

- المنحني يقبل في جوار $(-\infty)$ فرع قطع مكافئ في اتجاه المستقيم ذو المعادلة $y = x$

المنحني :



2) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

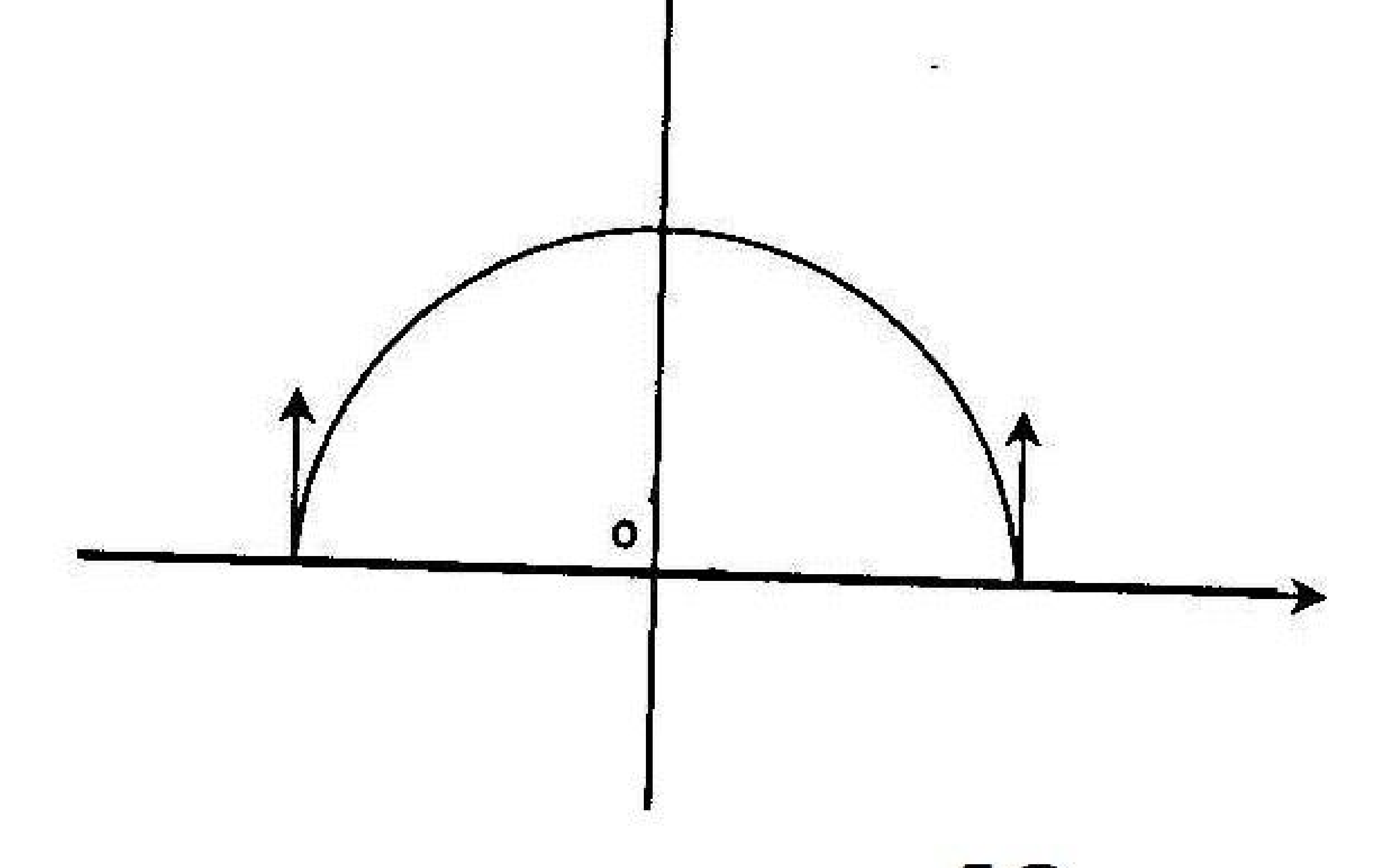
مجموعة التعريف : $D_f=[-2,\ 2]$

حساب المشتق : من أجل كل $x\in D_f$: $f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$

جدول التغيرات :

x	-2		0		2
$f'(x)$	||	+	0	−	||
$f(x)$	0	↗	2	↘	0

المنحني :



3) $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2}$

مجموعة التعريف : $D_f =]-\infty, \ +\infty[$

حساب النهايات : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$: $f'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$

جدول التغيرات :

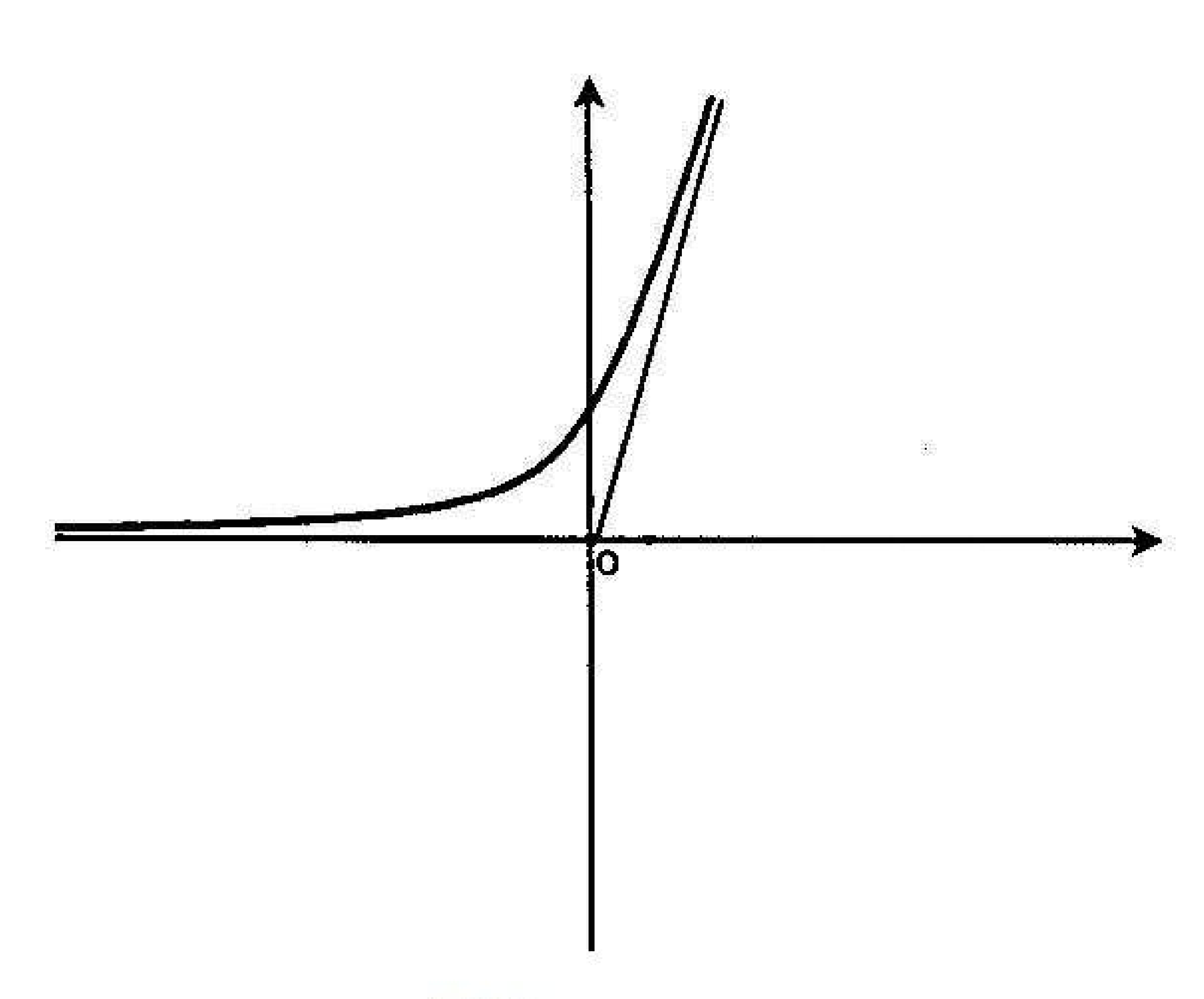
x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

الفروع اللانهائية :

المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(-\infty)$

المستقيم ذو المعادلة $y = 2x$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(+\infty)$

المنحني :



$f(x)=\sqrt{x^2-x-2}$ (4

<u>مجموعة التعريف</u> : $D_f =]-\infty, \ -1] \cup [2, \ +\infty[$

<u>حساب النهايات</u> : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

<u>حساب المشتق</u> : من أجل كل $x \in D_f$: $f'(x) = \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}$

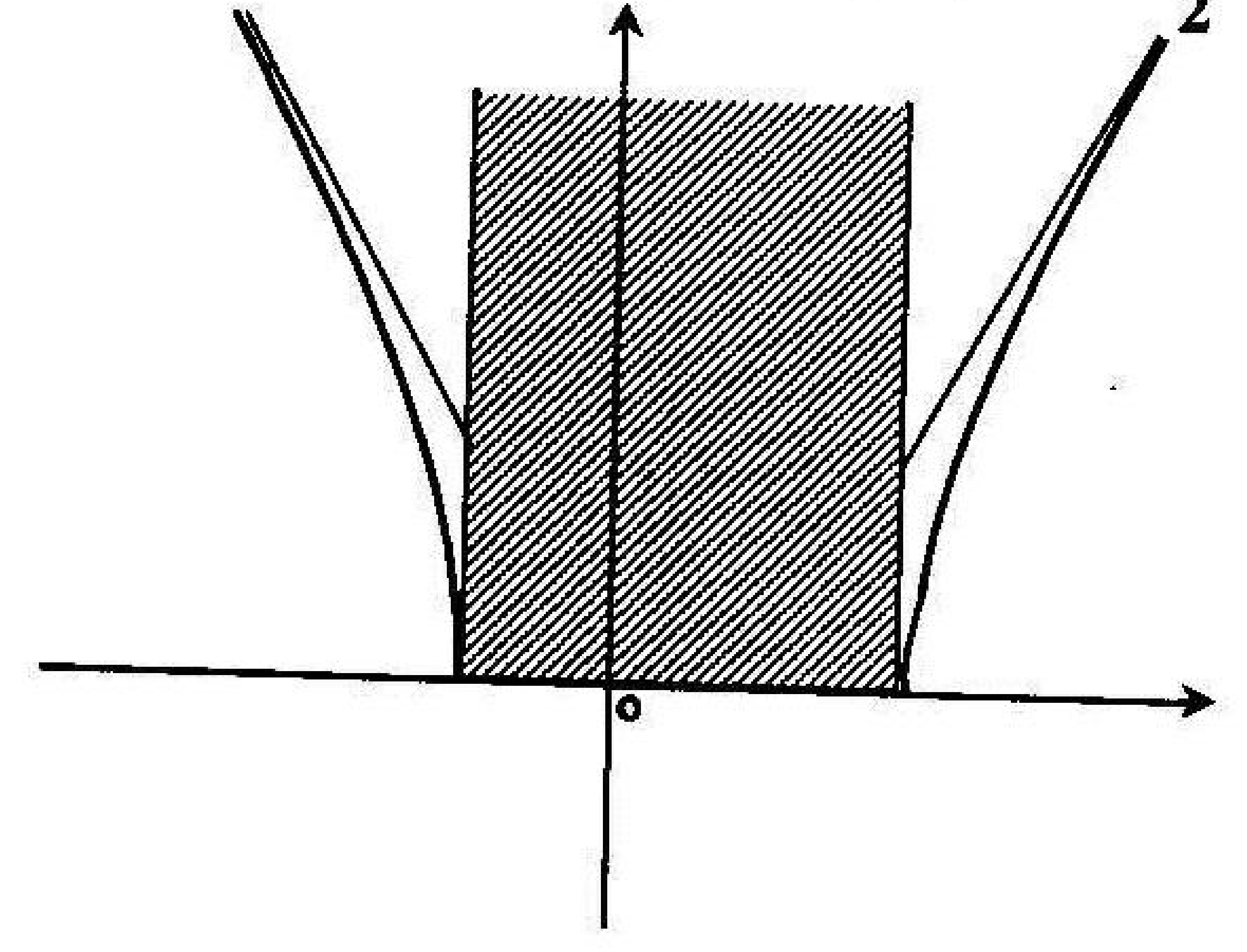
<u>جدول التغيرات</u> :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		//////		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	//////	0	↗	$+\infty$

<u>الفروع اللانهائية</u> :

- المستقيم ذو المعادلة $y=-x+\dfrac{1}{2}$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(-\infty)$
- المستقيم ذو المعادلة $y=x-\dfrac{1}{2}$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(+\infty)$

<u>المنحني</u> :



5) $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$

مجموعة التعريف : $D_f=[-1,\ \ 0[\cup]0,\ \ 1]$

حساب النهايات :

$\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} 0} f(x)=-\infty \qquad \lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} f(x)=+\infty$

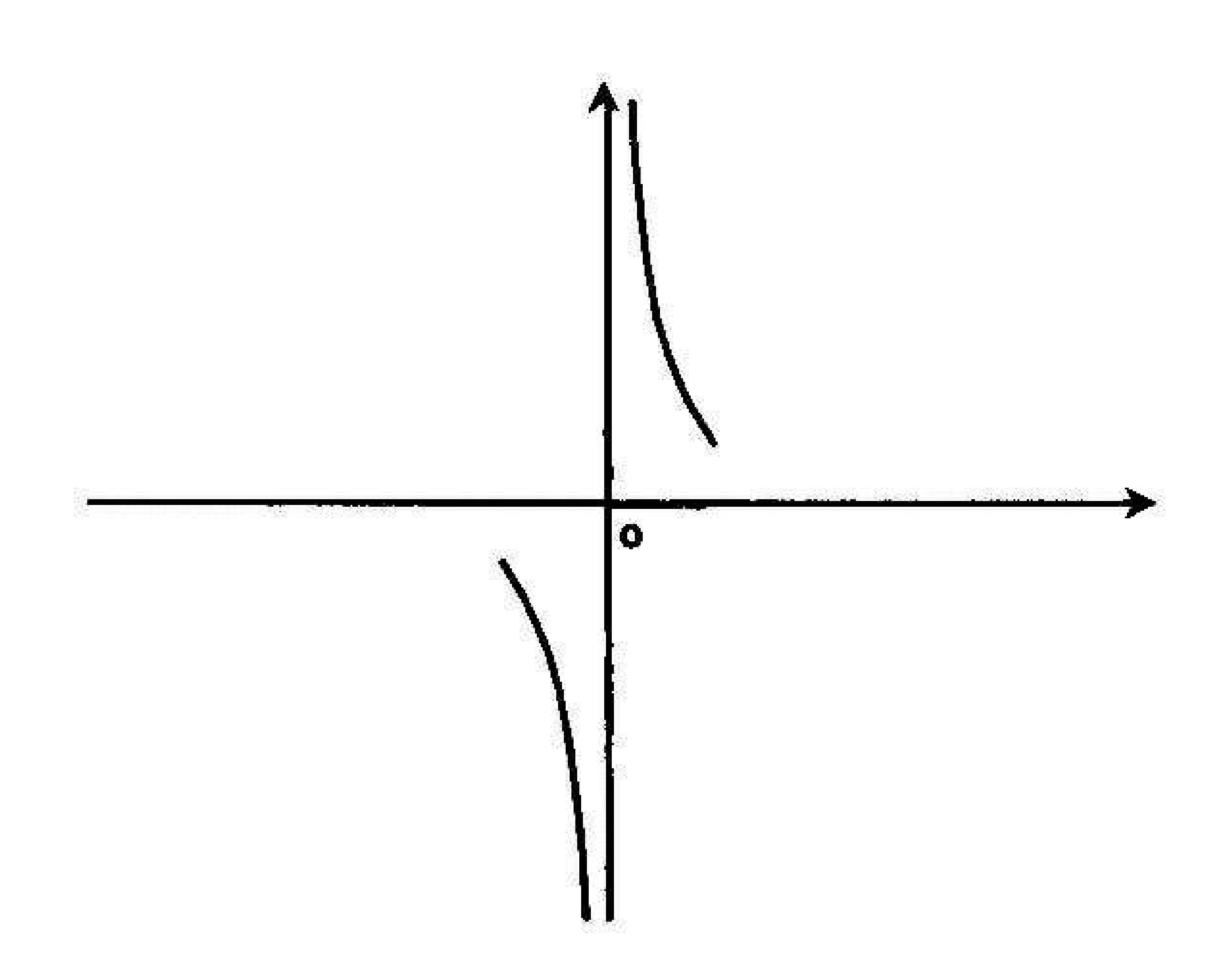
حساب المشتق : من أجل كل $x\in D_f$: $f'(x)=-\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

جدول التغيرات :

x	-1		0		1
$f'(x)$	‖	$-$	‖	$-$	‖
$f(x)$	-1 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1

الفروع اللانهائية :

المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مستقيم مقارب للمنحني **البياني :**



مسـائـل محلولـة

مسألة 1

I. لتكن الدالة العددية f ذات المتغير الحقيقي x والمعرفة بـ :

$f(x) = x - 3 + \sqrt{2(x+1)}$ ، وليكن (c) الممثل البياني لها في معلم متعامد ومتجانس . 1) - أ) أحسب $f(1)$, $f(0)$, $f(-1/2)$.

ب) أدرس تغيرات الدالة f .

2- أ) عين نقاط التقاطع للمنحني (c) مع محور الفواصل .

ب) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c).   جـ) أدرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$.   3) أنشئ المنحني (c)

4- أ) عين على المجال $]-1;+\infty[$ دالة أصلية للدالة $x \to \sqrt{2(x+1)}$.

ب) أحسب المساحة S مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي المحددة بالمنحني (c) والمستقيمات التي معادلاتها : $y = x$, $x = \frac{7}{2}$, $x = 0$

II. نعتبر التحويل T_α الذي يرفق بكل نقطة $M(x;y)$ من المستوي النقطة $M'(x';y')$

حيث : $\alpha \in \mathbb{R}$; $\begin{cases} x' = \alpha x + 1 \\ y' = (2\alpha - 1)y + 3 \end{cases}$

1) عين مجموعة قيم α من أجلها يكون T_α تقابل .

2) ما طبيعة التحويل $T_1(\alpha = 1)$ وما هي عناصره المميزة ؟

3) عين معادلة صورة المنحني (c) بالتحويل T_1

الحـل

I. 1) حساب $f(1)$, $f(0)$, $f(-1/2)$

$f(1) = 0$, $f(0) = -3 + \sqrt{2}$, $f(-1/2) = -5/2$.

ب) دراسة تغيرات الدالة f

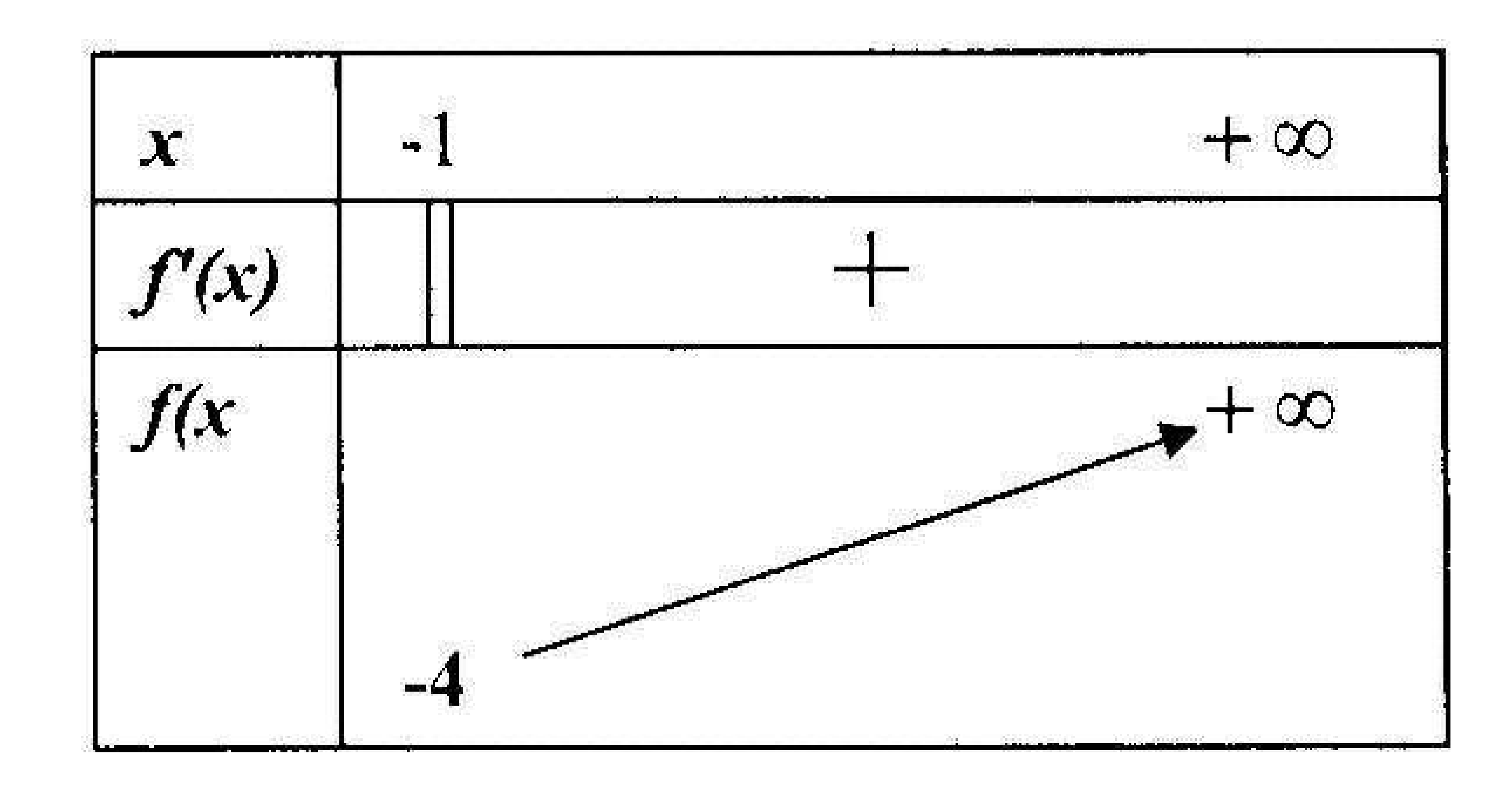
مجموعة تعريف : $D_f = [-1;+\infty[$

حساب النهايات : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

حساب المشتق ودراسة إشارته : من أجل كل $x \in D_f$ لدينا:

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2(x+1)}} > 0$$

جدول تغيرات :



x	-1 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	‖ $\qquad$ $+$
$f(x$	-4 ↗ $+\infty$

2-أ) تعيين نقطة تقاطع للمنحني (c) مع محور الفواصل

(c) يقطع $(x'x)$ معناه $f(x) = 0$ يكافئ $0 = x - 3 + \sqrt{2(x+1)} = 0$ ومنه :

$\sqrt{2(x+1)} = 3 - x$ ومنه $\begin{cases} 2(x+1) = (3-x)^2 \\ 3 - x \geq 0 \end{cases}$ و منه

$\begin{cases} x^2 - 8x + 7 = 0 \\ x \leq 3 \end{cases}$ ومنه $x = 1$ المنحني (c) يقطع $(x'x)$ في النقطة $(1;0)$

ب) دراسة الفروع اللانهائية للمنحني (c)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x-3}{x} + \frac{\sqrt{2(x+1)}}{x} \right] = 1$$

(لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2(x+1)}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{2(x+1)}{x^2}} = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{x-3}{x} = 1$)

$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} -3 + \sqrt{2(x+1)} = +\infty$ ، إذن المنحني (c) يقبل في جوار $+\infty$ فرع قطع مكافئ في اتجاه المستقيم ذي المعادلة $y = x$

جـ) دراسة وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم (Δ)

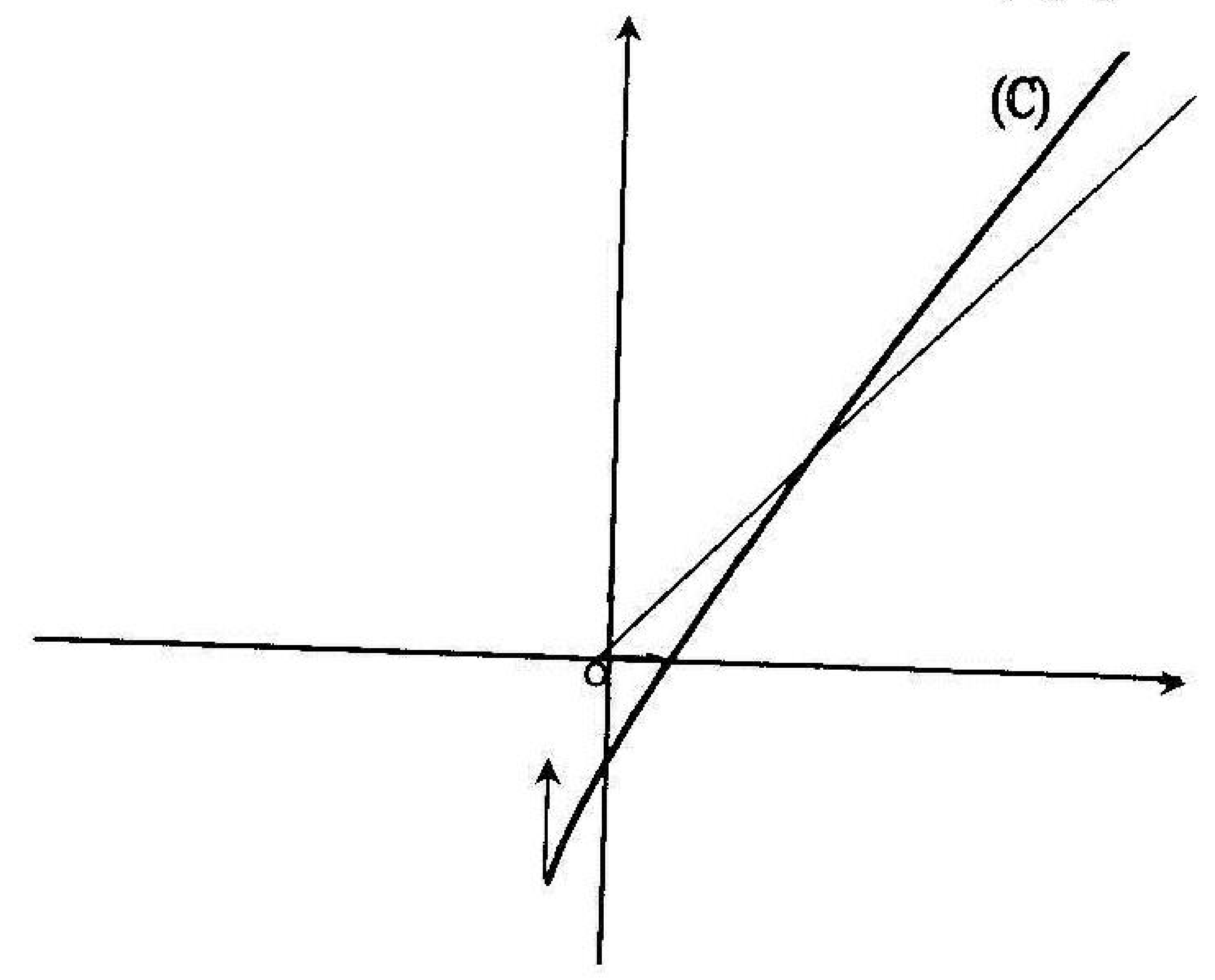
من أجل $x \in D_f$ لدينا : $f(x) - x = \sqrt{2(x+1)} - 3$.

من أجل $x \in D_f$ فإن $f(x) - x > 0$ يكافئ $\sqrt{2(x+1)} > 3$ ومنه $2(x+1) > 9$

ومنه $x > \frac{7}{2}$. على المجال $]7/2; +\infty[$ فيكون المنحني (c) فوق المستقيم (Δ)

من أجل $x \in D_f$ فإن $f(x) - x < 0$ لما $x \in]-1; 7/2[$ وبالتالي فيكون المنحني (c) تحت المستقيم (Δ) على هذا المجال .

3) إنشاء المنحني (c)



4- أ) تعيين على المجال $]-1; +\infty[$ دالة أصلية للدالة $x \to \sqrt{2(x+1)}$

$\int \sqrt{2(x+1)}\,dx = \sqrt{2} \int (x+1)^{\frac{1}{2}} dx$. بوضع $u(x) = (x+1)$ ، $u'(x) = 1$

$\int \sqrt{(x+1)}\,dx = \int u^{\frac{1}{2}} u'\,du$ ونعلم أن $\int u^n u'\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$

ومنه $\int (x+1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + c$.

الدالة $\int\sqrt{2(x+1)}dx = \sqrt{2}\int(x+1)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{(x+1)^3} + c$

ب) حساب الساحة المحددة بالمنحني (C) والمستقيمات التي معادلاتها :

$y = x$ ، $x = 0$, $x = 7/2$

$$S = \int_0^{7/2}[x - f(x)]dx = \int_0^{7/2}\left[3 - \sqrt{2(x+1)}\right]dx$$

$$= \left[3x - \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{(x+1)^3}\right]_0^{7/2} = \left(\frac{3}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)(ua)$$

(حيث $(u.a)$ هي وحدة المساحة)

II. 1) تعيين مجموعة قيم α من أجلها يكون T_α تقابل

1) يكون T_α تقابل إذا كان محدد الجملة غير معدوم ومنه $\alpha(2\alpha - 1) \neq 0$ وبالتالي $\alpha \neq 0$ و $\alpha \neq \frac{1}{2}$.

2) طبيعة التحويل $T_1(\alpha = 1)$

التحويل T_1 يرفق بكل نقطة $M(x;y)$ النقطة $M'(x';y')$ حيث :

$x' = x + 1$ و $y' = y + 3$ نلاحظ أن العبارة التحليلية للتحويل T_1 هي عبارة انسحاب شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

3) معادلة صورة المنحني (c) بالتحويل T_1

$M' = T_1(M)$ ومنه $T_1^{-1}(M') = M$ حيث : $x = x' - 1$ و $y = y' - 3$

نعلم ان معادلة (c) هي $y = x - 3 + \sqrt{2(x+1)}$ وتكون معادلة صورة المنحني (c) بالتحويل T_1 هي $y' - 3 = x' - 1 - 3 + \sqrt{2x'}$ ومنه $y' = x' - 1 + \sqrt{2x'}$.

مسألة 2

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بـ : $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$ وليكن (c) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. 1- أ) عين مجموعة تعريف الدالة f .

ب) أدرس اشتقاق الدالة f على يسار $x = -1$ وعلى يمين $x = 1$ و فسر هندسيا النتيجة.

2- أ) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. ب) أدرس تغيرات الدالة f . جـ) استنتج إشارة $f(x)$.

3- أ) برهن بأن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = 2x$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c) .

ب) أدرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى (Δ) .

4) أنشئ المنحني (c) في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$

5) ناقش وحسب قيم الوسيط m حلول المعادلة : $x-\sqrt{x^2-1}=m \quad (m\in\mathbb{R})$

6) لتكن الدالة g المعرفة بـ : $g(x)=|x|-\sqrt{x^2-1}$. نسمي (c') الممثل البياني لها في المعلم السابق . أ) تحقق بأن الدالة g زوجية . ب) أنشئ المنحني (c') في نفس المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

الحـل

1-أ) تعيين مجموعة تعريف الدالة f

تكون الدالة f معرفة إذا كان $x^2-1\geq 0$ أي $x\in\left]-\infty;-1\right]\cup\left[1;+\infty\right[$ وبالتالي :

$$D_f=\left]-\infty;-1\right]\cup\left[1;+\infty\right[$$

ب) دراسة قابلية الاشتقاق الدالة f على يسار $x=-1$ وعلى يمين $x=1$

- مشتق f على يسار $x=-1$:

$$\lim_{x\xrightarrow{<}-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\xrightarrow{<}-1}\frac{(x+1)-\sqrt{x^2-1}}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\xrightarrow{<}-1}1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=-\infty$$

فالدالة f غير قابلة الاشتقاق على يسار $x=-1$ ويكون للمنحني (c) عند هذه النقطة نصف مماسا يوازي محور التراتيب .

- مشتق الدالة f على يمين $x=1$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\xrightarrow{>}1}1-\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=-\infty$$

فالدالة f غير قابلة الاشتقاق على يمين $x=+1$ ويكون للمنحني (c) عند هذه النقطة نصف مماس يوازي محور التراتيب .

1- أ) حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}=0$$

ب)دراسة تغيرات الدالة f

مجموعة تعريف : $D_f=]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$

حساب النهايات: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

حساب المشتق ودراسة إشارته :

من أجل كل $x\in D_f$ لدينا : $f'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}$ ،

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\sqrt{x^2-1}-x$.

لكل $x\in]-\infty;-1]$ فإن $\sqrt{x^2-1}-x>0$ ومنه $f'(x)>0$ على هذا المجال.

لكل $x\in]1;+\infty]$ فإن :

$$\sqrt{x^2-1}-x=\frac{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}{\sqrt{x^2-1}+x}=\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}<0$$

ومنه $f'(x)<0$ من أجل $x\in]1;+\infty]$

جدول تغيرات:

x	$-\infty$ -1		1 $+\infty$
$f'(x)$	$+$	//////	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ -1	//////	1 ↘ 0

من جدول تغيرات الدالة f لدينا : $f(x)<0$ من أجل $x\in]-\infty;-1]$

$f(x) > 0$ من أجل $x \in [1;+\infty[$

3- أ) البرهان على أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x$ هو مستقيم مقارب

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-2x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[-x-\sqrt{x^2-1}\right] =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(-x-\sqrt{x^2-1}\right)\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)}{-x+\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-x+\sqrt{x^2-1}} = 0$$

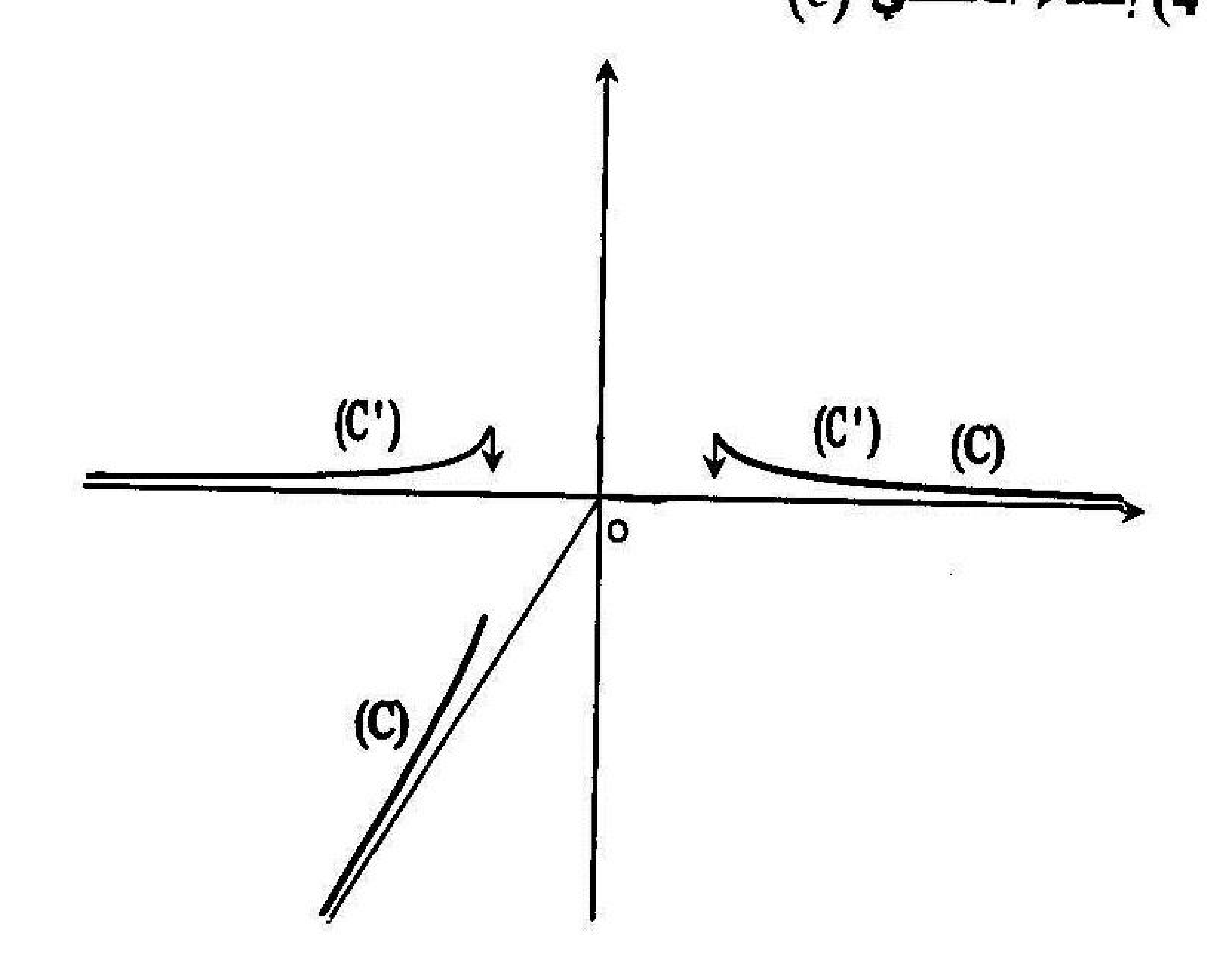
إذن المستقيم ذو المعادلة $y = 2x$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c) في جوار $(-\infty)$

ب) وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم (Δ)

$$f(x)-2x = -x-\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{-x+\sqrt{x^2-1}} > 0 \quad ; x \in \left]-\infty;-1\right]$$

إذن المنحني (c) يكون فوق المستقيم المقارب (Δ)

4) إنشاء المنحني (c)



5) المناقشة بيانيا وحسب قيم الوسيط m لحلول المعادلة $f(x) = m$

من رسم المنحني (c) نلاحظ أن :

- إذا كان $m \in]-\infty;-1[$ ، المعادلة $f(x)=m$ تقبل حل وحيد سالب
- إذا كان $m \in]0;1[$ ، المعادلة $f(x)=m$ تقبل حل وحيد موجب
- إذا كان $m \in]-1;0[\cup]1;+\infty[$ ، المعادلة $f(x)=m$ ليست لها حلول

6- أ) التحقق بأن الدالة g زوجية

$g(-x)=|-x|-\sqrt{(-x)^2-1}=|x|-\sqrt{x^2-1}=g(x)$ ،

فالدالة g هي دالة زوجية .

ب) إنشاء المنحني (c') للدالة g

بما أن الدالة g زوجية فيكون منحنيها البياني متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب.

على المجال $]0;+\infty[$ لدينا $g(x)=f(x)$ إذن على المجال $]1;+\infty[$

المنحني (c') منطبق على المنحني (c). على المجال $]-\infty;-1[$ المنحني (c') يناظر بالنسبة إلى محور التراتيب المنحني (c) في المجال $]1;+\infty[$.

مسألة 3

لتكن الدالة f ذات المتغير الحقيقي x والمعرفة بـ : $f(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

نسمي (c) الممثل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس.

1) أدرس تغيرات الدالة f .

2- أ) أثبت أن النقطة $A(0;1)$ هي نقطة انعطاف للمنحني (c)

ب) أكتب معادلة المماس للمنحني (c) عند النقطة A .

3) لتكن الدالة h المعرفة كما يلي : $h(x)=f(x)-x$.

باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة ، برهن أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حل وحيد $\alpha \in]1;2[$. 4) أنشئ المنحني (c).

5) أحسب مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحني (c) والمستقيمات التي معادلاتها :

$x=0$, $x=2$, $y=0$

6) لتكن الدالة g المعرفة بـ: $g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. 1) تحقق بأن g هي دالة فردية

اشرح كيف يمكن إنشاء المنحني (Γ) للدالة g باستعمال المنحني (c).

<u>الحـل</u>

I. 1) دراسة تغيرات الدالة f

- <u>مجموعة تعريف</u> : $D_f =]-\infty;+\infty[$

- <u>حساب النهايات</u> :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 1+\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} 1-\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 1+\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 2$$

<u>حساب المشتق</u>: من أجل كل $x \in D_f$: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}\left(x^2+1\right)} > 0$

<u>جدول تغيرات</u> :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x$	$0 \nearrow 2$

2-أ) إثبات أن النقطة $A(0;1)$ هي نقطة انعطاف المنحني

لدينا من أجل كل $x \in D_f$: $f'(x) = \frac{1}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$ ومنه $f''(x) = -\frac{3x}{\left(x^2+1\right)^{\frac{5}{2}}}$

نلاحظ أن $f''(0) = 0$ و $f''(x)$ يغير إشارته بمرور على 0 ، إذن النقطة ذات الفاصلة $x = 0$ هي نقطة انعطاف المنحني (c)

ب) معادلة المماس للمنحني (c) عند النقطة $A(0;1)$

معادلة المماس للمنحني عند $x = 0$ هي : $y = f'(0)(x-0)+f(0) = x+1$

3) البرهان بأن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حل وحيد $\alpha \in]1;2[$

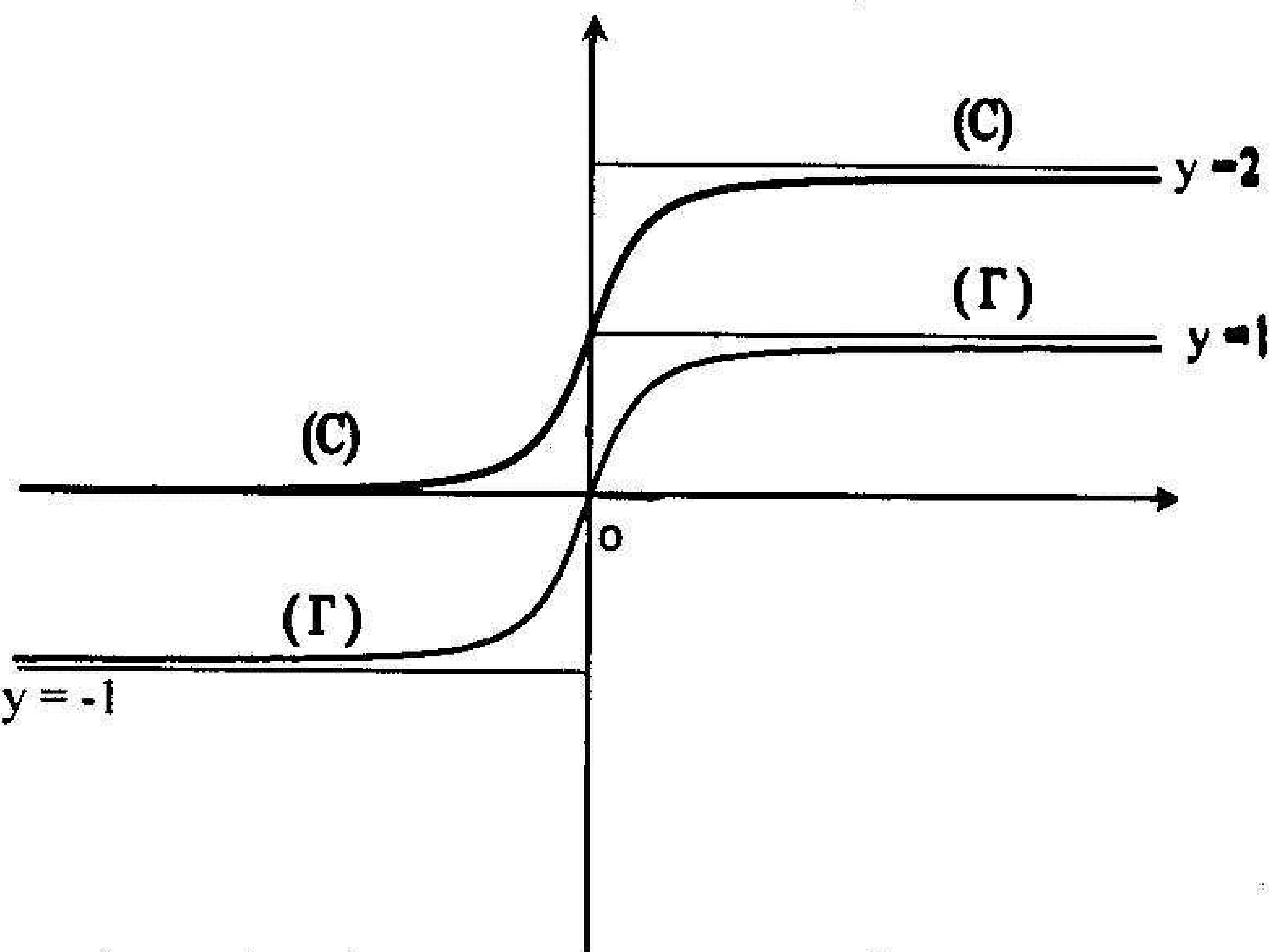
من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$$h'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}\left(x^2+1\right)}-1=\frac{1-\sqrt{x^2+1}\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+1}\left(x^2+1\right)}<0$$

(لأن من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $\sqrt{x^2+1}\left(x^2+1\right)>1$)

$h(1)=\frac{\sqrt{2}}{2}\simeq 0,707$, $h(2)=\frac{2\sqrt{5}}{5}-1\simeq -0,105$. الدالة h مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[1;2]$ و العدد 0 محصور بين $h(1)$ و $h(2)$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $h(x)=0$ تقبل حل وحيد $\alpha\in]1;2[$.

4) إنشاء المنحني (c)



5) حساب المساحة المحددة بالمنحني (c) والمستقيمات التي معادلاتها

$x=0,\ x=2\ ,\ y=0$

$$S=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=\int_0^2 dx+\int_0^2\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

$$\int_0^2 dx=[x]_0^2\ .\qquad \int_0^2\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^2\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}\times x\,dx$$

بوضع $u(x) = x^2 + 1$ ومنه $u'(x) = 2x$ و منه $x = \frac{1}{2}u'(x)$ إذن :

$$\int (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} x dx = \frac{1}{2}\int u'(x)[u(x)]^{-\frac{1}{2}} dx = [u(x)]^{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{x^2+1} + c$$

إذن $S = \left[x + \sqrt{x^2+1}\right]_0^2 = \left(2+\sqrt{5}\right) - 1 = 1 + \sqrt{5}\ (u.a)$

II. 1) التحقق بأن الدالة g هي دالة فردية

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $g(-x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = -g(x)$ فالدالة g هي دالة فردية .

2) شرح إنشاء المنحني (Γ) باستعمال المنحني (c)

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $g(x) = f(x) - 1$ ، إذن المنحني (Γ) يستنتج من المنحني (c) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$.



دوال جذرية مقترحة للدراسة

أدرس دراسة كاملة (تغيرات ، الفروع اللانهائية ، رسم المنحني) لكل من الدوال الآتي :

1) $f(x) = x - 2\sqrt{x}$, 2) $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 4}$

3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$, 4) $f(x) = x + \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + 1}$

5) $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 2x - 3}$, 6) $f(x) = \sqrt{x + 5} + \sqrt{1 - 3x}$

7) $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x^2 + 1}$, 8) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}}$

9) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6|x| + 8}$, 10) $f(x) = 6 - \sqrt{-x^2 + 4x + 1}$

11) $f(x) = \sqrt{x^3 - 6x^2 + 32}$, 12) $f(x) = x + 3 - 2\sqrt{x^2 - 4x + 7}$

13) $f(x) = \frac{x\sqrt{3 - x}}{3x + 1}$, 14) $f(x) = \frac{x - 4\sqrt{x}}{2\sqrt{x} - 9}$

15) $f(x) = \sqrt{\frac{x + 5}{x^2 - 4|x| + 3}}$

مسـائل مـقترحة للحـل

مسألة 1

لتكن الدالة العددية f المعرفة بـ : $f(x)=1-x+\sqrt{x^2+x+1}$ و (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس . 1)ادرس تغيرات الدالة f ثم استنتج أن : $\forall x\in\mathbb{R} : f(x)>0$. 2) أدرس الفروع اللا نهائية للمنحني (Γ) .

3) - أ) أحسب $f(1)$, $f(0)$, $f(-1)$. ب) أرسم المنحني (Γ).

4) لتكن الدالة g المعرة بـ $g(x)=1-|x|+\sqrt{x^2+|x|+1}$ وليكن (c) تمثيلها البياني . أ) أدرس اشتقاق الدالة g عند النقطة $x=0$.

ب) باستعمال المنحني (Γ) اشرح كيف يمكن إنشاء المنحني (c)

مسألة 2

لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x)=\sqrt{|x^2-6x+5|}$ وليكن (c) منحنيها البياني .

1)أكتب عبارة $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة . 2)أدرس اشتقاق واستمرارية الدالة f عند النقطتين $x_0=0$ و $x_1=5$ ما ذا نستنتج ؟ . 3) أدرس تغيرات الدالة f

4)-أ) برهن بأن المستقيم ذو المعادلة : $x=3$ هو محور تناظر للمنحني (c)

ب) برهن بأن المستقيمان اللذان معادلتاهما $y=x-3$ و $y=-x+3$ هما مستقيمان مقاربان للمنحني (c). 5)عين إحداثيات نقاط التقاطع للمنحني (c) مع المستقيمين المقاربين .

6) أ نشئ المنحني (c)

مسألة 3

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بـ : $f(x)=-x+\sqrt{\frac{x}{x-1}}$ وليكن (c) منحنيها .

1)-أ) عين مجموعة التعريف الدالة f .   ب) أدرس قابلية الاشتقاق الدالة f على يسار $x=0$.   2) أحسب الدالة المشتقة $f'(x)$ وتحقق أن : $f'(x)>0$

3) أحسب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف وأعطي جدول التغيرات الدالة f

4)-أ) أدرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم (D) ذو المعادلة $y=-x+1$

ب) ادرس الفروع اللاّ نهائية للمنحني (c).   جـ)عين نقاط التقاطع (c) مع المحورين

5) أرسم المنحني (c)

مسألة 4

نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x حيث : $f(x)=|x|+\sqrt{x^2-4}$ وليكن (c) منحنيها البياني في معلم متعامد ومتجانس . 1) عين مجموعة التعريف الدالة f وبين أنها زوجية

2) أدرس اشتقاق الدالة f على يمين $x_0=2$ وعلى يسار $x_0=-2$ وفسر هندسيا النتيجة

3) أدرس تغيرات الدالة f . 4) أدرس الفروع اللاّ نهائية للمنحني (c)

5) أنشىء المنحني (c).

6) ناقش بيانيا وحسب الوسيط الحقيقي m حلول المعادلة : $f(x)=m$

الــدوال المثلثيــة

لدراسة الدوال المثلثية يجب الانتباه إلى ما يلي :
- إذا كانت الدالة دورية يكون مجال دراستها في دور واحد للدالة
- إذا كانت زوجية أو فردية تختصر دراستها على نصف مجال للدراسة

أمثلة على دراسة الدوال المثلثية

مثال 1 :
أدرس دراسة كاملة (تغيرات، الفروع اللانهائية، رسم المنحني) لكل من الدوال التالية :

1) $f(x)=\sin^2 x+\cos x$ 　　 2) $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{\cos^2 2x}$

3) $f(x)=\cos 2x-2\cos x-1$ 　　 4) $f(x)=\sin x+|\sin x|$

الحـــل

1) $f(x)=\sin^2 x+\cos x$

مجموعة التعريف:
الدالة f دورية و دورها 2π و بالتالي مجال دراستها يكون $[-\pi,\pi]$
الدالة f زوجية لأن $f(-x)=f(x)$ إذن فتكون دراسة الدالة f على نصف مجال

أي : $[0,\pi]$

حساب المشتق : من أجل كل x من $[0,\pi]$ لدينا :

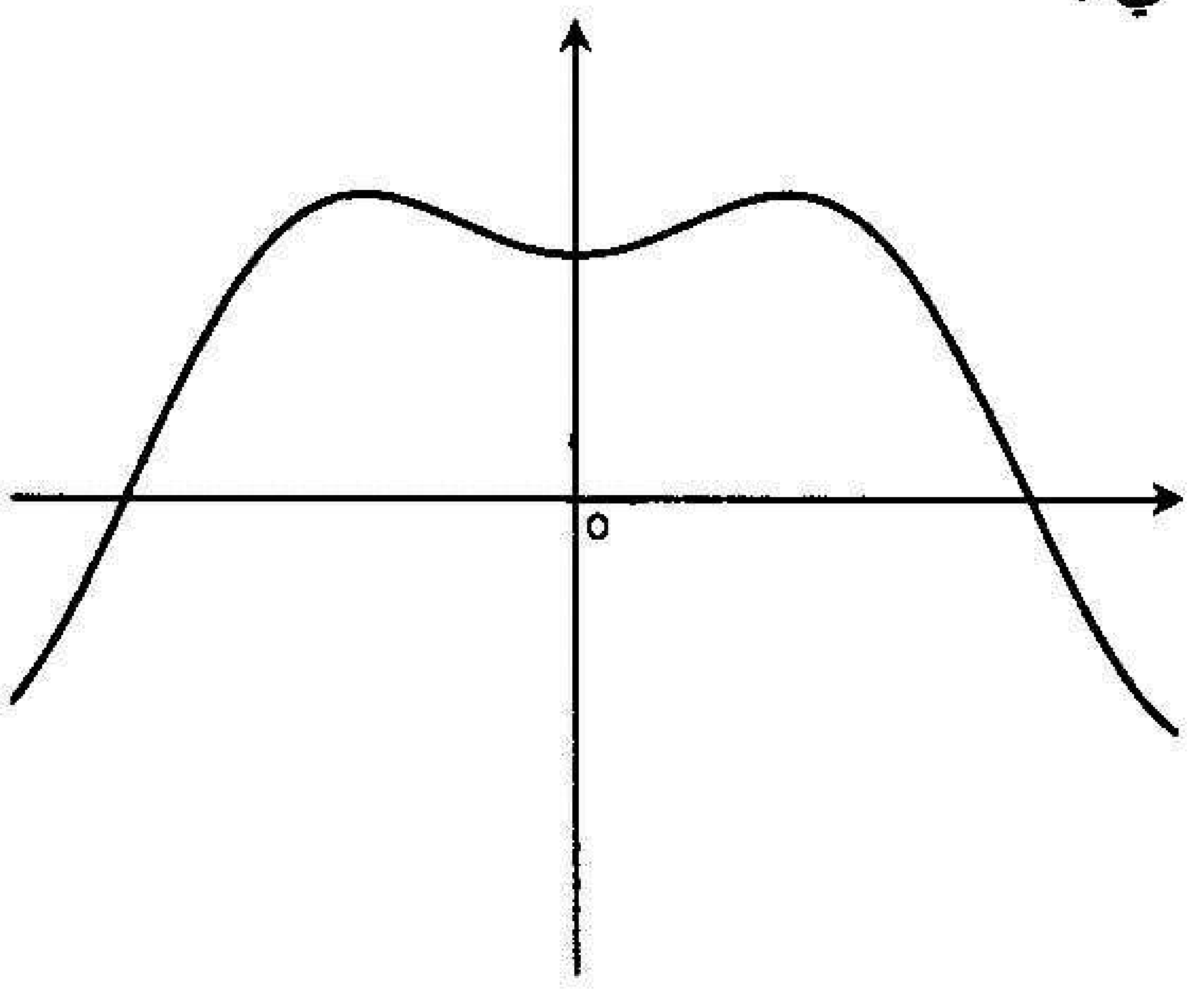
$$f'(x)=2\sin x\cos x-\sin x=\sin x(2\cos x-1)$$

أشارة $f'(x)$ هي من إشارة $2\cos x-1$ لأن $\sin x\geq 0$ على المجال $[0,\pi]$

جدول التغيرات :

x	0		$\pi/3$		π
$f'(x)$	0	+	0	−	0
$f(x)$	1	↗	5/4	↘	-1

المنحني :



2) $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{\cos^2 2x}$

<u>مجموعة التعريف:</u>

الدالة f معرفة اذا كان $\cos 2x \neq 0$ و منه $x \neq \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$ و بما أن الدالة f دورية و دورها π و فردية لأن : $f(-x)=-f(x)$ و بالتالي دراستها تكون مقتصرة على المجال $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ و هي معرفة من أجل كل x من المجال $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$

<u>حساب النهايات</u> :

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \pi/4} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \pi/4} f(x)=+\infty$

حساب المشتق : لكل x من المجال $\left[0,\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ لدينا :

$f'(x)=\dfrac{2\cos 2x\left(\cos^2 2x+2\sin^2 2x\right)}{\cos^4 2x}$ أشارة $f'(x)$ هي من إشارة $\cos 2x$

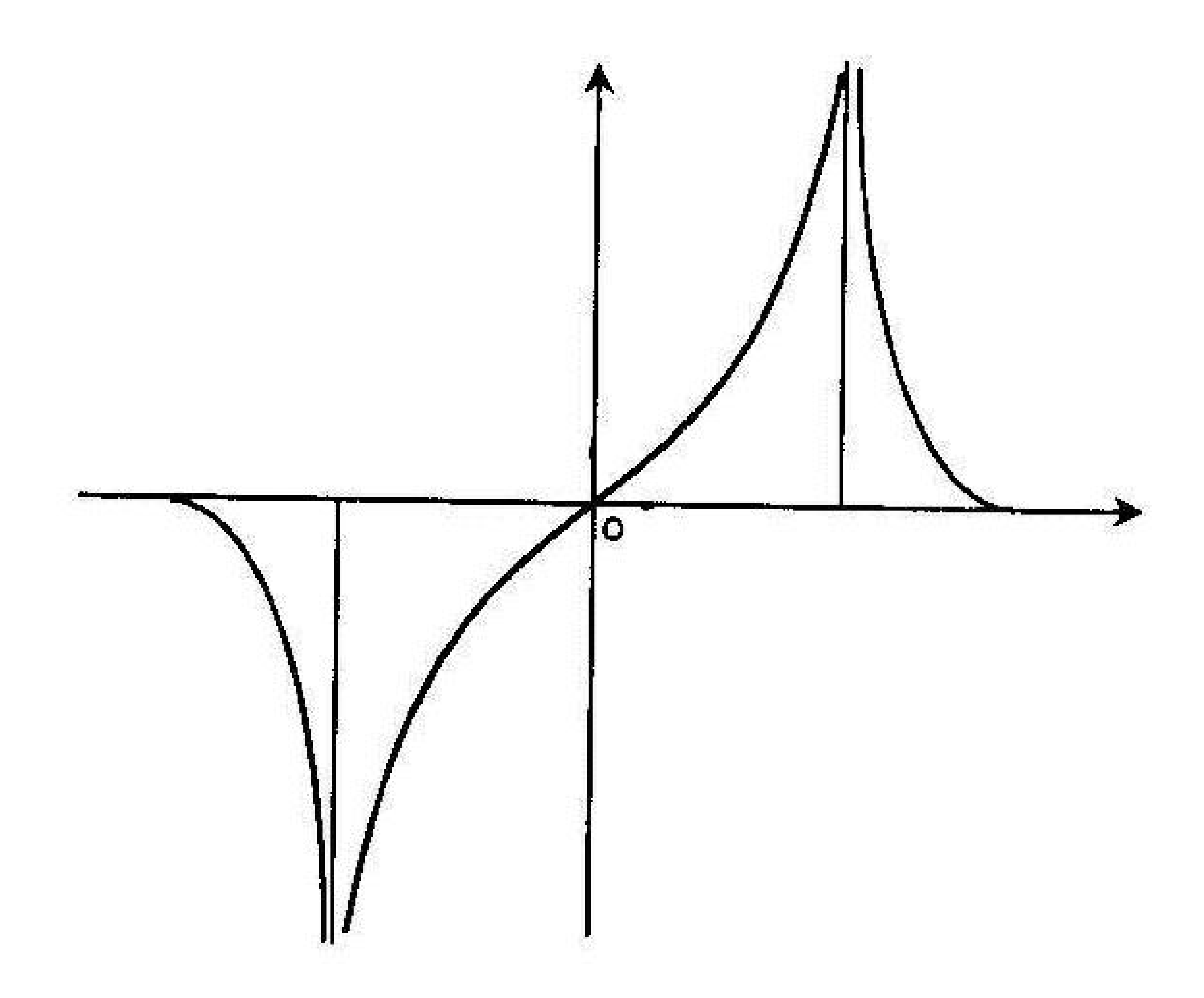
$\cos 2x \succ 0$ و منه $0\prec 2x\prec\frac{\pi}{2}$ و منه $0\prec x\prec\frac{\pi}{4}$

$\cos 2x \prec 0$ و منه $\frac{\pi}{2}\prec 2x\prec\pi$ و منه $\frac{\pi}{4}\prec x\prec\frac{\pi}{2}$

جدول التغيرات :

x	0		$\pi/4$		$\pi/2$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

المنحني :



$f(x)=\cos 2x-2\cos x-1$

مجموعة التعريف: $D_f=\left]-\infty,+\infty\right[$

الدالة f دورية و دورها 2π و بالتالي مجال دراستها يكون $[-\pi,\pi]$

الدالة f زوجية لأن $f(-x)=f(x)$ إذن فتكون دراسة الدالة f على نصف مجال أي : $[0,\pi]$

<u>حساب المشتق</u> : من أجل كل x من $[0,\pi]$ لدينا :

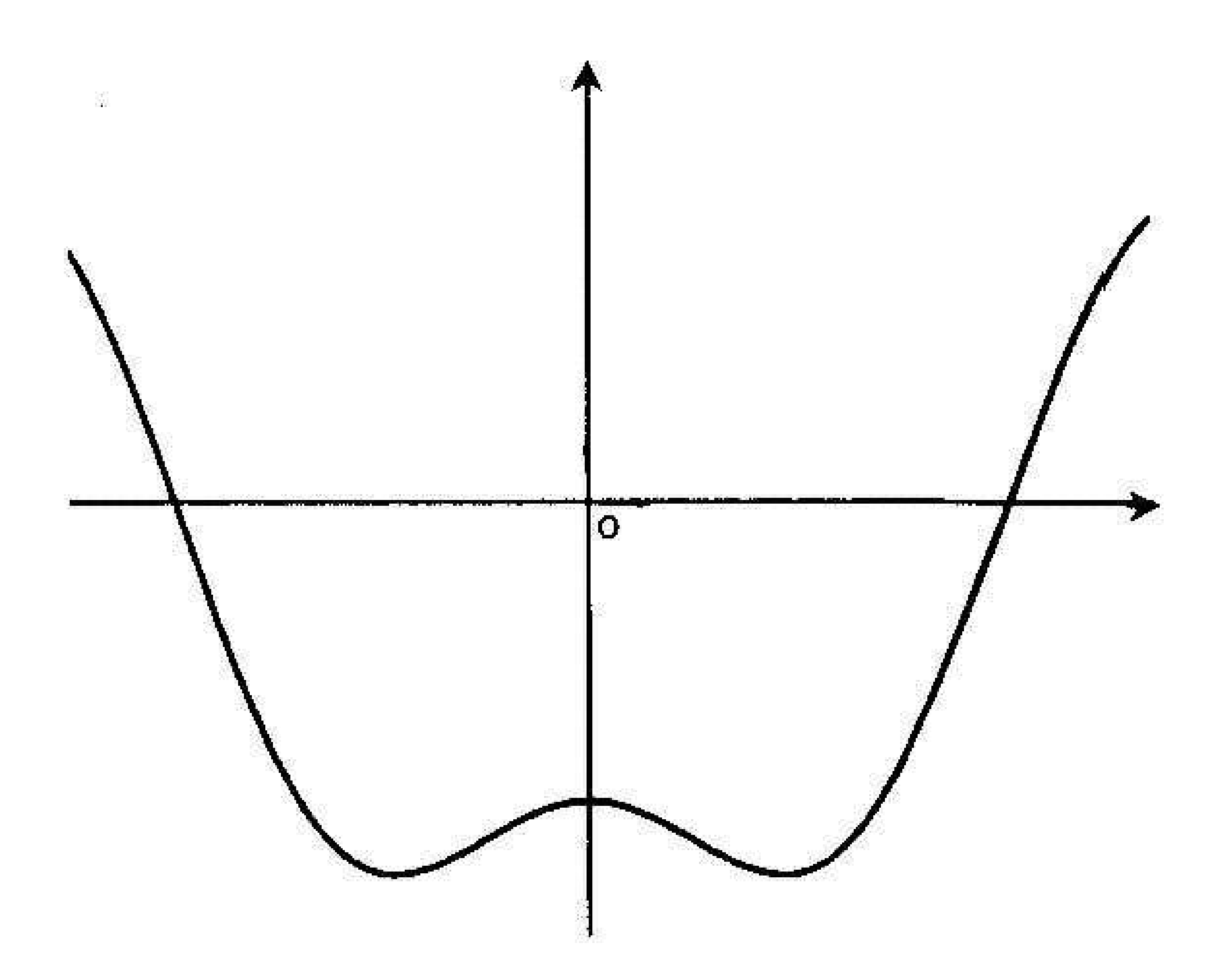
$$f'(x) = -2\sin 2x + 2\sin x$$
$$= -4\sin x\cos x + 2\sin x = -2\sin x(2\cos x - 1)$$

من اجل كل x من $[0,\pi]$ فإن: $-2\sin x \prec 0$ ، إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $-(2\cos x - 1)$

<u>جدول التغيرات</u> :

x	0		$\pi/6$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	$\searrow$	$f(\pi/6)$	$\nearrow$	2

المنحني :



4) $f(x) = \sin x + |\sin x|$

مجموعة التعريف:

الدالة f دورية و دورها 2π و بالتالي مجال دراستها يكون $[0,2\pi]$

من أجل كل x من $[0,\pi]$ لدينا $\sin x \geq 0$ و منه $f(x)=2\sin x$

و على المجال $[\pi,2\pi]$ لدينا $\sin x \leq 0$ و منه $f(x)=\sin x-\sin x=0$

حساب المشتق :

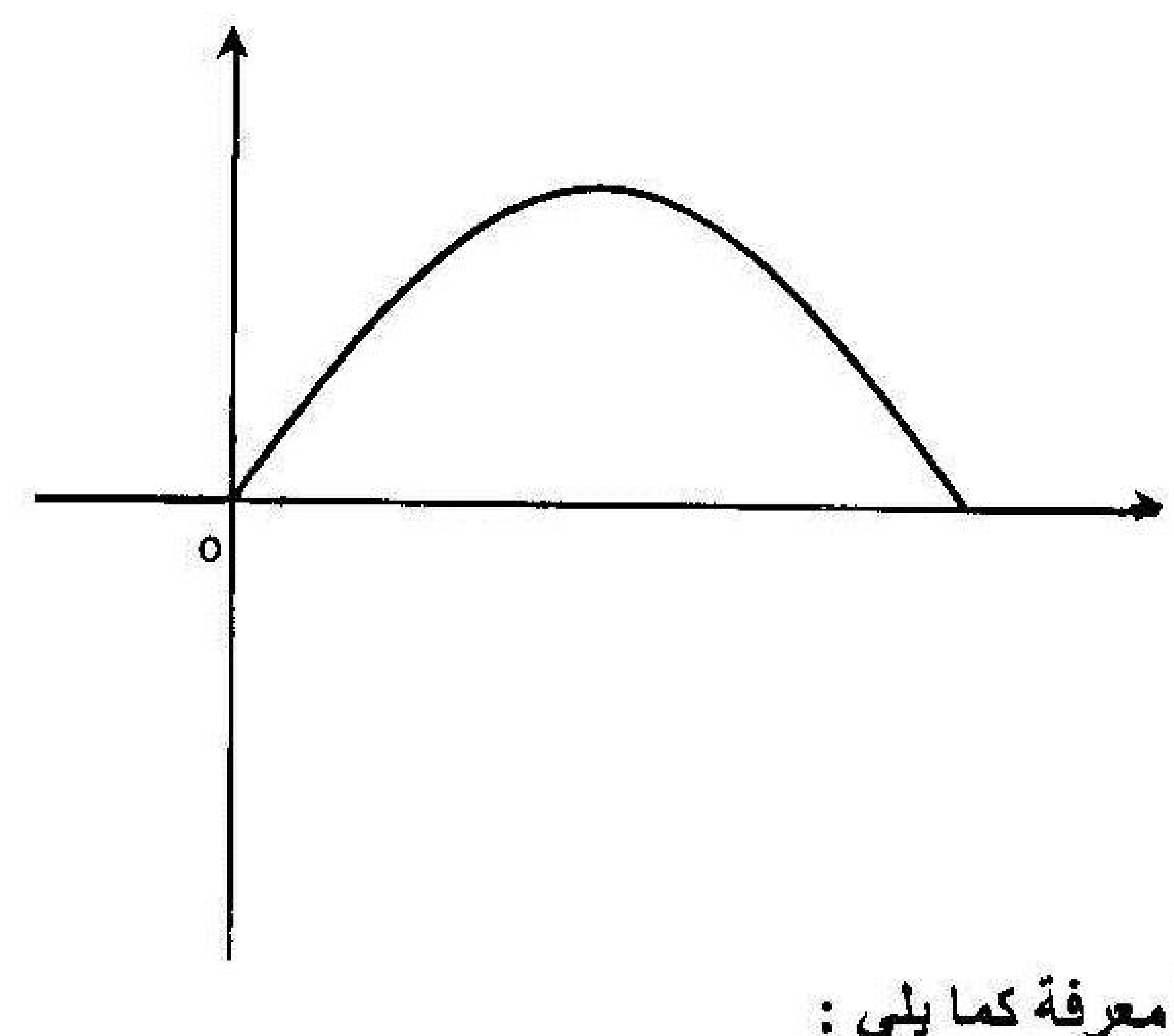
من أجل كل x من $[0,\pi]$ لدينا : $f'(x)=2\cos x$

من أجل كل x من $[\pi,2\pi]$ لدينا: $f'(x)=0$

جدول التغيرات :

x	0		$\pi/2$		π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	↗	2	↘	0

المنحني :



مثال 2

f دالة عددية معرفة كما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sin x} & , x\in\,]-\pi;0[\,\cup\,]0;\pi[\\ f(0)=0 \end{cases}$$

أ) اثبت أن الدالة f مستمرة عند النقطة $x = 0$

ب- أدرس قابلية الاشتقاق الدالة f عند النقطة $x = 0$

ج- بين أن الدالة f فردية ثم أدرس تغيراتها

د- أرسم المنحني (c)

الحــل

أ- إثبات أن الدالة f مستمرة عند النقطة $x = 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{2\sin(x/2)\cos(x/2)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}$$

إذن الدالة f مستمرة عند النقطة $x = 0$

ب- دراسة قابلية الاشتقاق الدالة f عند النقطة $x = 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{2x\sin(x/2)\cos(x/2)} = \lim\frac{\sin(x/2)}{x\cos(x/2)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x/2)}{2\times(x/2)}\times\frac{1}{\cos(x/2)} = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة $x = 0$

جـ- إثبات أن الدالة f فردية :

$f(-x) = \dfrac{1-\cos(-x)}{\sin(-x)} = -\dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = -f(x)$ و منه الدالة f فردية

دراسة تغيرات الدالة f :

مجموعة التعريف:

بما أن الدالة f فردية و بالتالي دراستها تكون مقتصرة على نصف المجال أي $]0,\pi[$

حساب النهايات :

$$\lim_{x \xrightarrow{<} \pi} f(x) = +\infty$$

حساب المشتق :

من أجل كل x من $]0,\pi[$ لدينا :

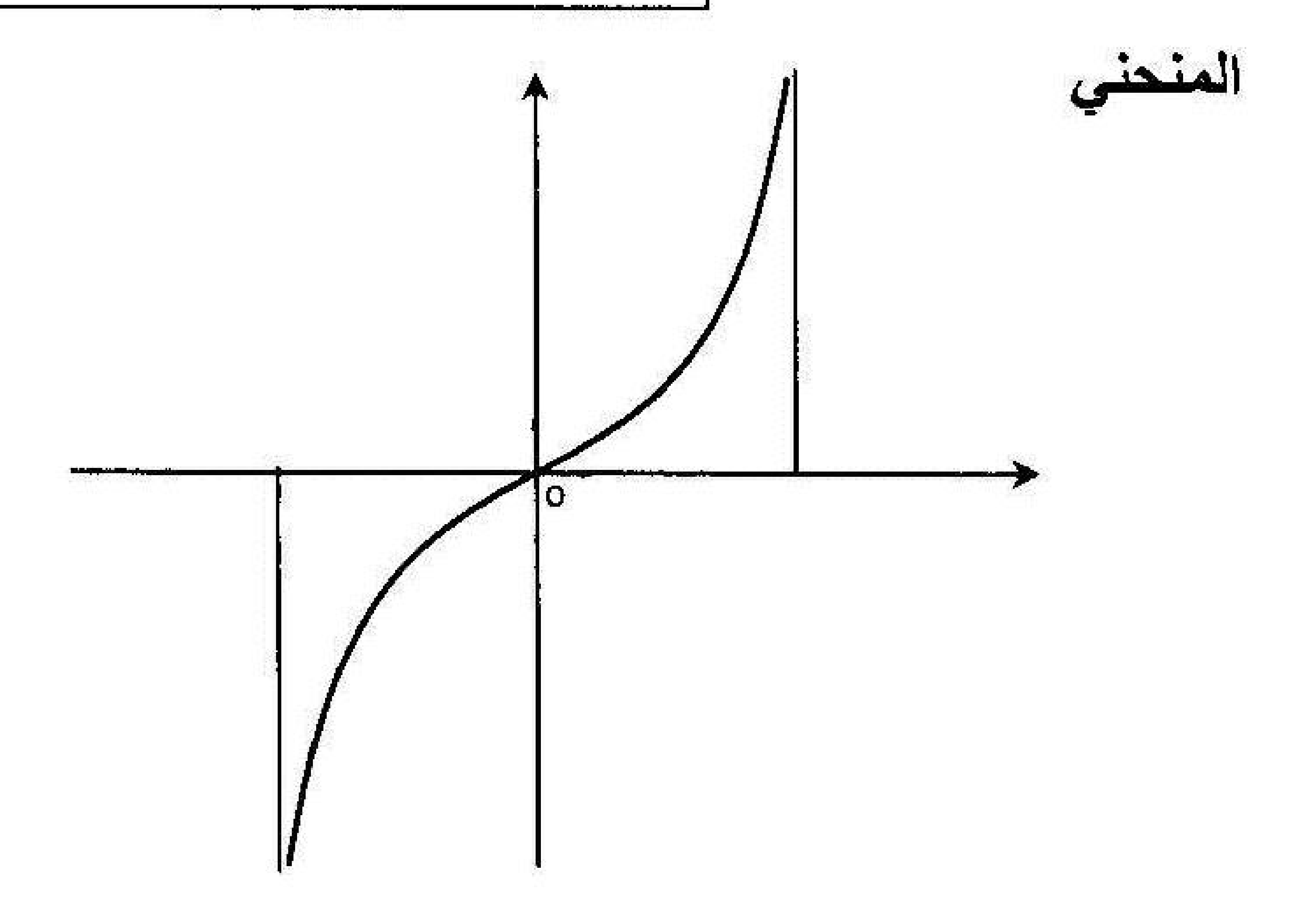
$$f'(x)=\frac{\sin^2 x-\cos x(1-\cos x)}{\sin^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x-\cos x}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\geq 0$$

جدول التغيرات :

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ π
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

المنحني



دوال مثلثية مقترحة للدراسة

أدرس دراسة كاملة (تغيرات، الفروع اللانهائية، رسم المنحني) لكل من الدوال التالية :

1) $f(x)=2\cos^2 x-3\cos x+2$

2) $f(x)=\cos x+\cos^2 x$

3) $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{\sin x}$

4) $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{2}\cos 2x$

5) $f(x)=\sin^2 x-\sin x$

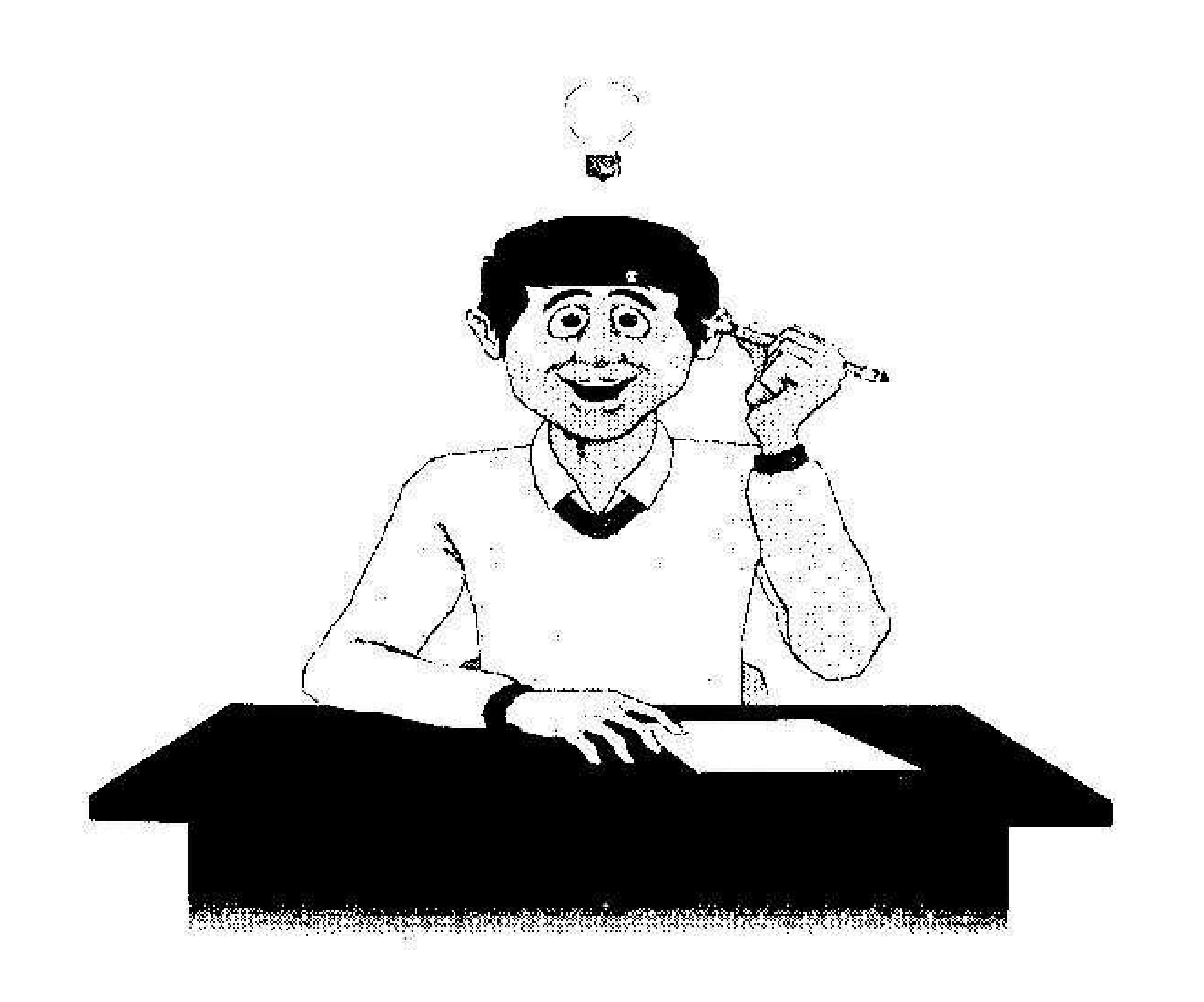
6) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x+\sin x}$

7) $f(x)=\cos x+x\sin x$

8) $f(x)=\dfrac{1+2\sin x}{1-\cos x}$

9) $f(x)=\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos^2 x}$

10) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2}\sin x}{2\cos^2 x}1$



الـــدوال الأســـية

الدوال الأسية ذات الأساس e

تعريف : الدالة f التي هي معرفة وقابلة الاشتقاق على $\mathbb{R}$ وتحقق الشرطين الآتيين:
$f'(x) = f(x)$ و $f(0) = 1$ تسمى : " الدالة الأسية " ونرمز لها بـ : $\exp(x)$
أو بالكتابة المبسطة e^x (تقرأ : أسية x)

الخواص الأساسية للدالة الأسية

من أجل كل عددين حقيقيين x, y ومن أجل كل عدد صحيح

$$* \; e^{x+y} = e^x \times e^y \quad , \quad * \; e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad , \quad * \; e^{nx} = \left(e^x\right)^n$$

* $x > 0$ يكافئ $e^x > 1$ ، * $x < 0$ يكافئ $e^x < 1$ ، * $e^x = e^y$ يكافئ $x = y$
* $x > y$ يكافئ $e^x > e^y$ ، * $x < y$ يكافئ $e^x < e^y$ ، * $e^0 = 1$

دراسة الدالة الأسية

الاشتقاق :

الدالة $x \to e^x$ قابلة الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\left(e^x\right)' = e^x$. بصفة عامة إذا كانت الدالة u قابلة الا شتقاق على D فإن من أجل كل $x \in D$: $\left[e^{u(x)}\right]' = u'(x) \times e^{u(x)}$

النهايات

$$* \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad , \quad * \lim_{x \to -\infty} x \times e^x = 0 \quad , \quad * \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

$$* \lim_{u(x) \to +\infty} e^{u(x)} = +\infty \quad , \quad * \lim_{u(x) \to -\infty} u(x) \times e^{u(x)} = 0 \quad , \quad * \lim_{u(x) \to -\infty} e^{u(x)} = 0$$

$$* \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad , \quad * \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$* \lim_{u(x) \to 0} \frac{e^{u(x)} - 1}{u(x)} = 1 \quad , \quad * \lim_{u(x) \to +\infty} \frac{e^{u(x)}}{u(x)} = +\infty$$

ملا حضات :

1 – من أجل كل $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ فإن : $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ ، $\lim_{x \to -\infty} x^\alpha \times e^x = 0$

-2 $\ln e^{u(x)} = u(x)$ ، $e^{\ln u(x)} = u(x)$

الدوال الأسية ذات الأساس a حيث $(a \succ 0 , a \neq 1)$

تعريف

a عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن العدد 1

نسمي الدالة الآ سية ذات الأساس a الدالة : $x \to a^x$

$\forall x \in \mathbb{R} : a^x = e^{x \ln a}$

ملاحظات

1- لدراسة الدالة $x \to a^x$ نحولها إلى الدالة ذات الأساس e $\left(x \to e^{x \ln a}\right)$ ثم ندرسها

2- الدالة $x \to a^x$ لها نفس الخواص كالدالة $x \to e^x$

3- إذا كان $a \succ 1$ فإن : $x \succ y \Leftrightarrow e^x \succ e^y$

- إذا كان $0 \prec a \prec 1$ فإن : $x \succ y \Leftrightarrow e^x \prec e^y$

أمثلة على دراسة الدوال الأسية

للدرس دراسة كاملة (تغيرات، الفروع اللانهائية، رسم المنحني) لكل من الدوال الآتية :

1) $f(x) = (x+1)e^{-x+1} + 1$

2) $f(x) = 1 - x^2 e^{-x}$

3) $f(x) = \dfrac{2e^x}{1-e^{2x}}$

4) $f(x) = (2x^2 + x + 1)e^x$

5) $f(x) = \dfrac{2e^x - 2}{e^x + 2}$

6) $f(x) = e^x + 1 - \dfrac{3}{e^x - 1}$

7) $f(x) = 2x + 1 - \dfrac{2e^x}{e^x + 1}$

8) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x} + e^x + 1} + \dfrac{5}{3}$

9) $f(x) = \dfrac{1}{e^x - 1} - \dfrac{1}{e^x + 1}$

10) $f(x) = (x-2)e^x + xe^{-x}$

11) $f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}$

12) $f(x) = 2^x + 3e^x - 2$

الحـــل

1) $f(x) = (x+1)e^{-x+1} + 1$

مجموعة التعريف : $D_f =]-\infty, \quad +\infty[$

حساب النهايات : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ ، $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$: $f'(x) = -xe^{-x+1}$

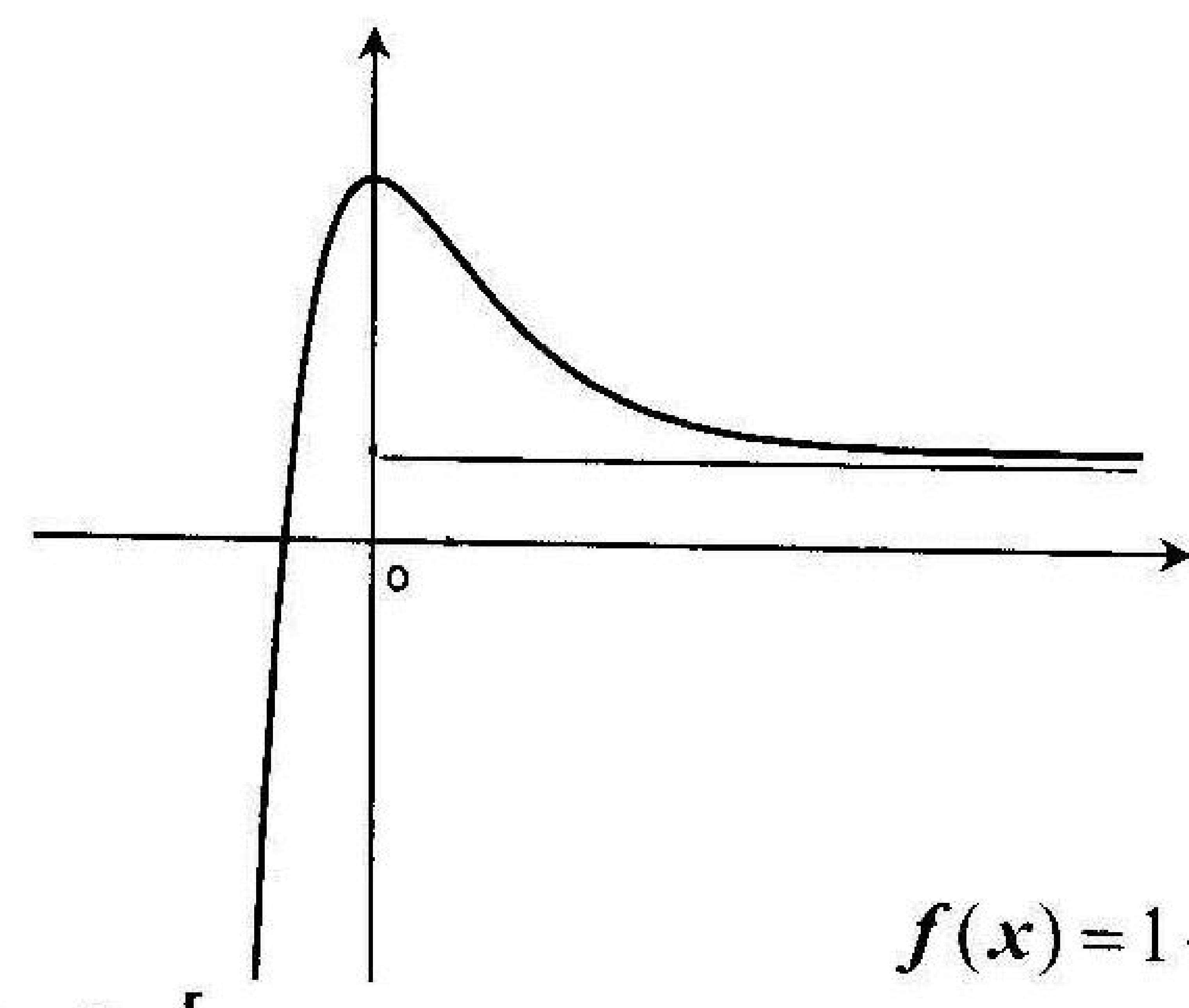
جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$e+1$	↘	1

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(+\infty)$.
- المنحني له فرع قطع مكافئ في اتجاه محور التراتيب في جوار $(-\infty)$

المنحني :



2) $f(x) = 1 - x^2e^{-x}$

مجموعة التعريف : $D_f =]-\infty, \quad +\infty[$

حساب النهايات :

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ $\quad\quad$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$: $f'(x) = \left(x^2 - 2x\right)e^{-x}$

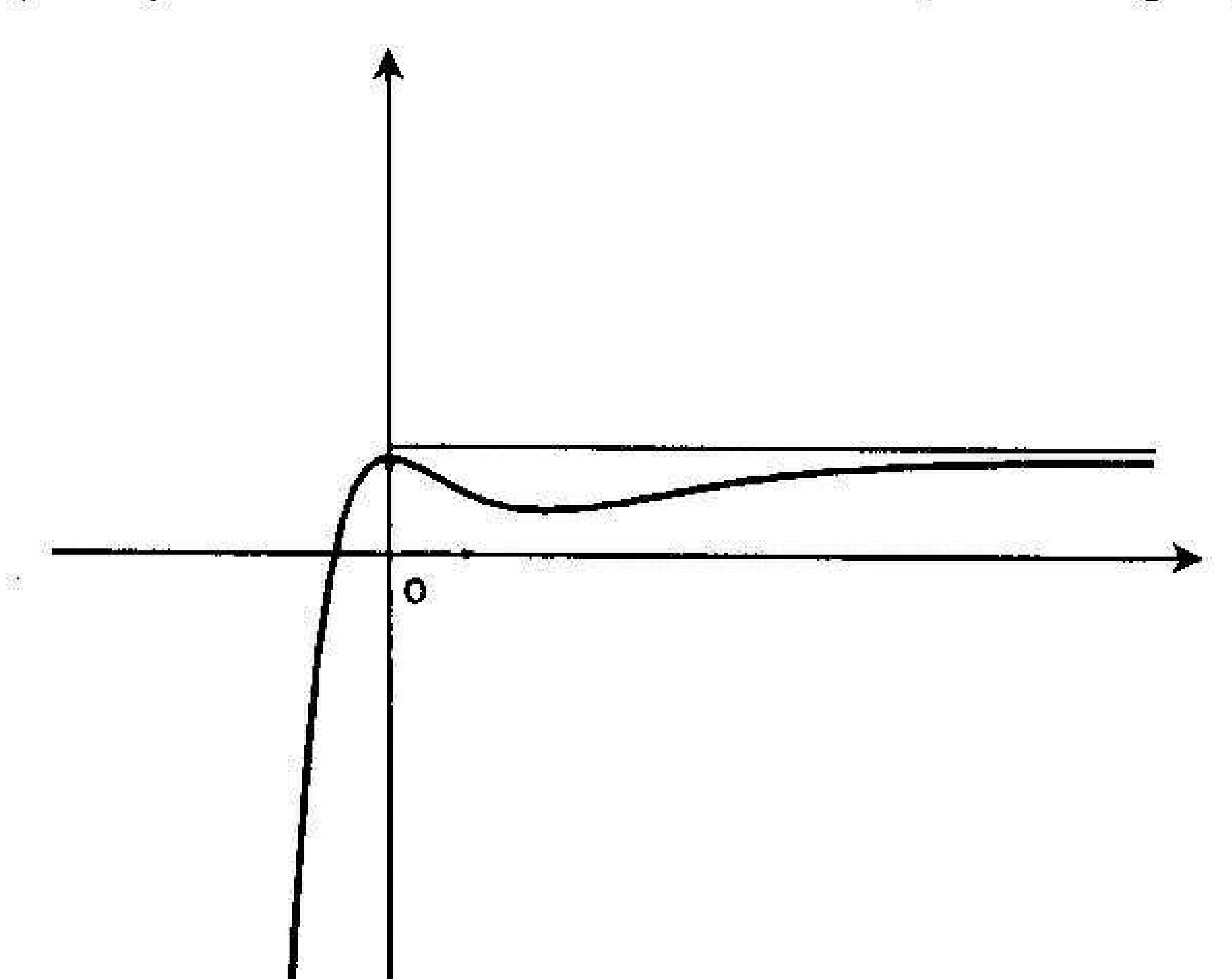
جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$f(2)$	↗	1

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(+\infty)$.
- المنحني له فرع قطع مكافئ في اتجاه محور التراتيب في جوار $(-\infty)$

المنحني :



3) $f(x) = \dfrac{2e^{x}}{1 - e^{2x}}$

مجموعة التعريف : $D_f =]-\infty, \ 0[\cup]0, \ +\infty[$

حساب النهايات :

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ، $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$:

$$f'(x) = \frac{2\left(1+e^{2x}\right)e^{x}}{\left(1-e^{2x}\right)^{2}}$$

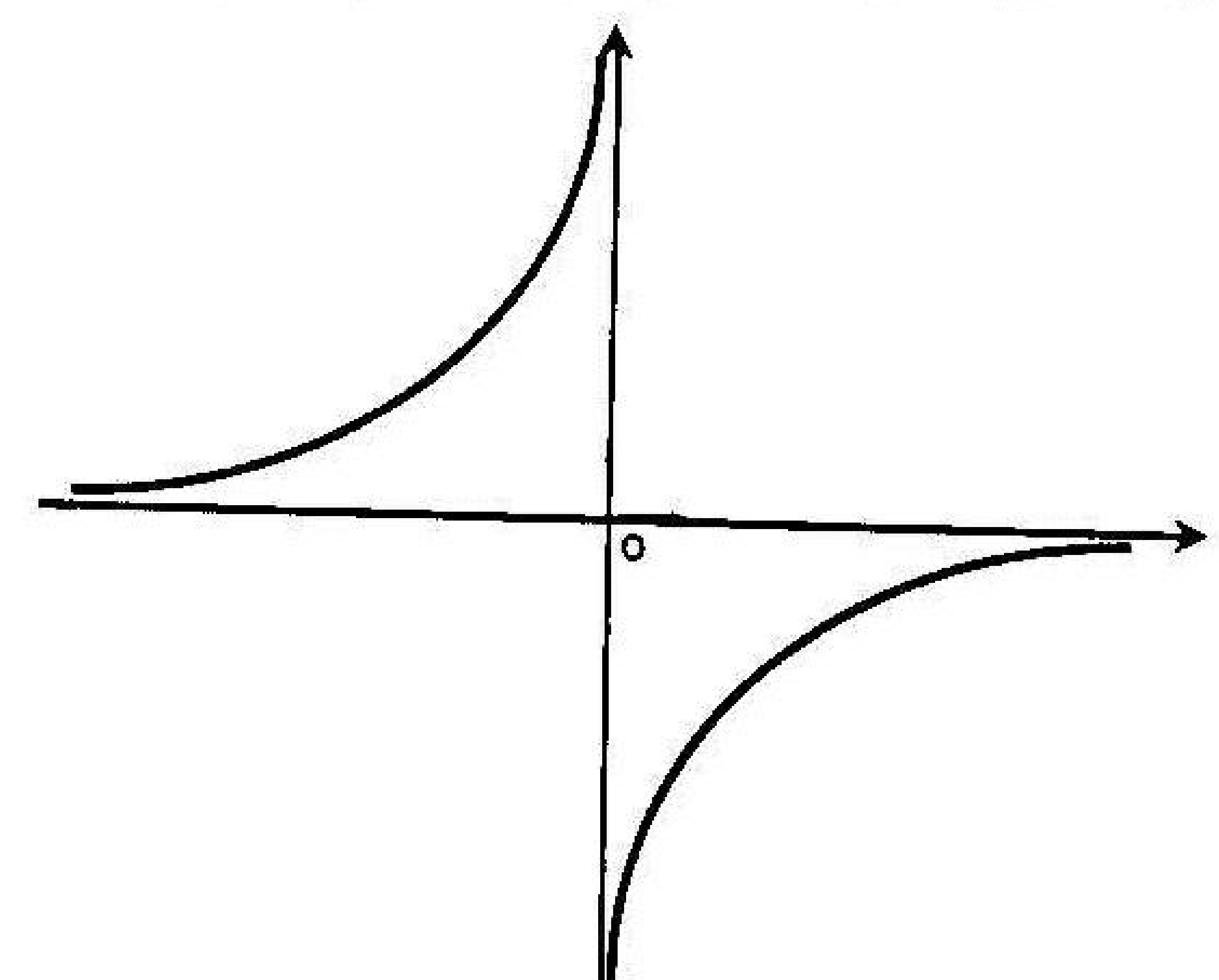
جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	0 ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$		↗ 0

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ هو مستقيم مقارب للمنحني.
- المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(+\infty)$ و$(-\infty)$

المنحني :



4) $f(x) = \left(2x^{2}+x+1\right)e^{x}$

مجموعة التعريف : $D_f =]-\infty, \ +\infty[$

حساب النهايات :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$: $f'(x) = \left(2x^2 + 5x + 2\right)e^x$

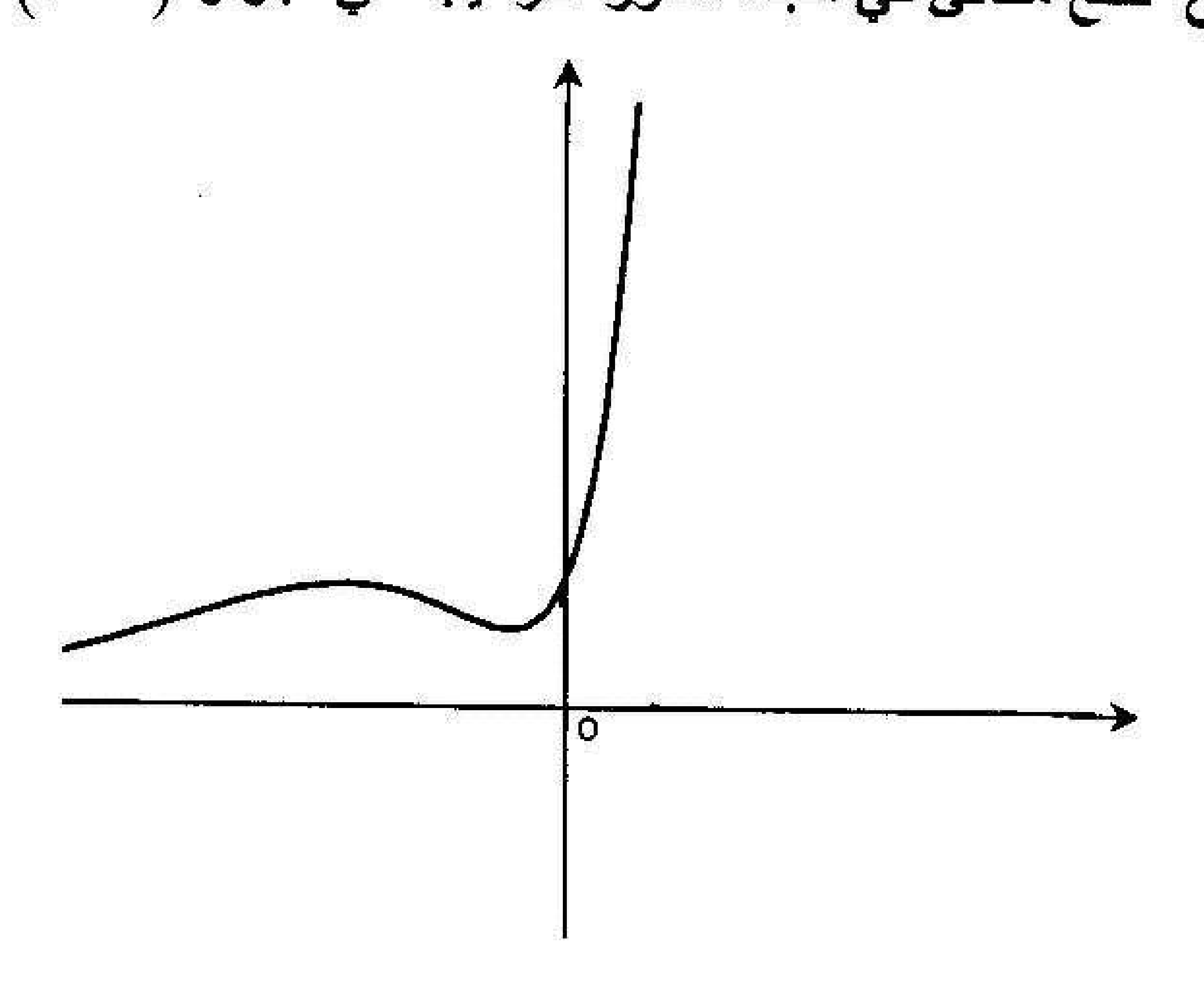
جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-2		$-1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$7/e^2$	↘	$1/\sqrt{e}$	↗	$+\infty$

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(-\infty)$.
- المنحني له فرع قطع مكافئ في اتجاه محور التراتيب في جوار $(+\infty)$

المنحني :



5) $f(x)=\dfrac{2e^{x}-2}{e^{x}+2}$

<u>مجموعة التعريف</u> : $D_f=]-\infty,\ +\infty[$

<u>حساب النهايات</u> :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$

<u>حساب المشتق</u> : من أجل كل $x\in D_f$:

$$f'(x)=\frac{6e^{x}}{\left(e^{x}+2\right)^{2}}$$

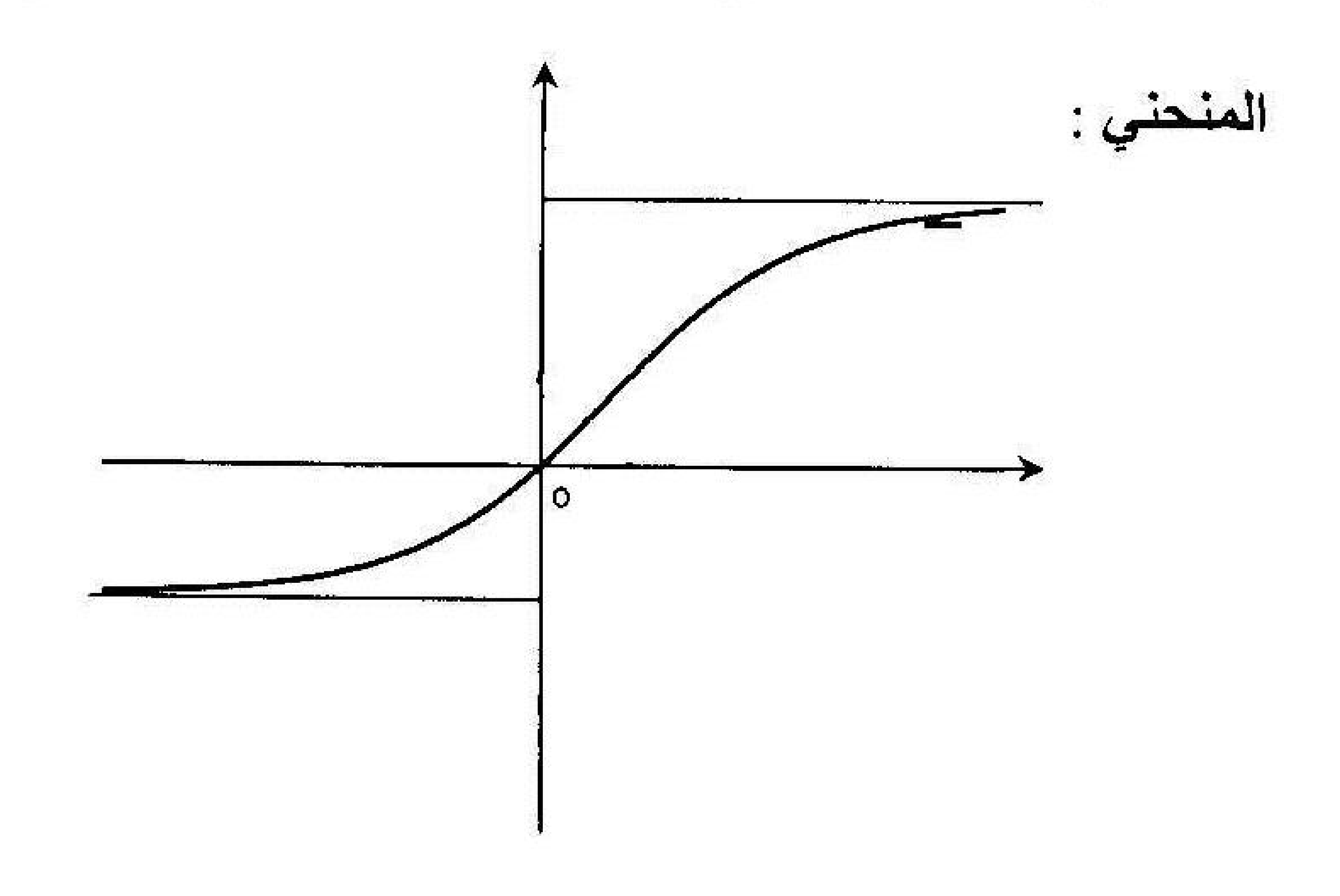
<u>جدول التغيرات</u> :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	-1 ↗ 2

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $y=-1$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(-\infty)$.
- المستقيم ذو المعادلة $y=2$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(+\infty)$

المنحني :



6) $f(x) = e^{x} + 1 - \dfrac{3}{e^{x} - 1}$

مجموعة التعريف : $D_f =]-\infty, \ 0[\cup]0, \ +\infty[$

حساب النهايات :

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 4$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = -\infty$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$: $f'(x) = \left(1 + \dfrac{3}{\left(e^{x} + 1\right)^2}\right) e^{x}$

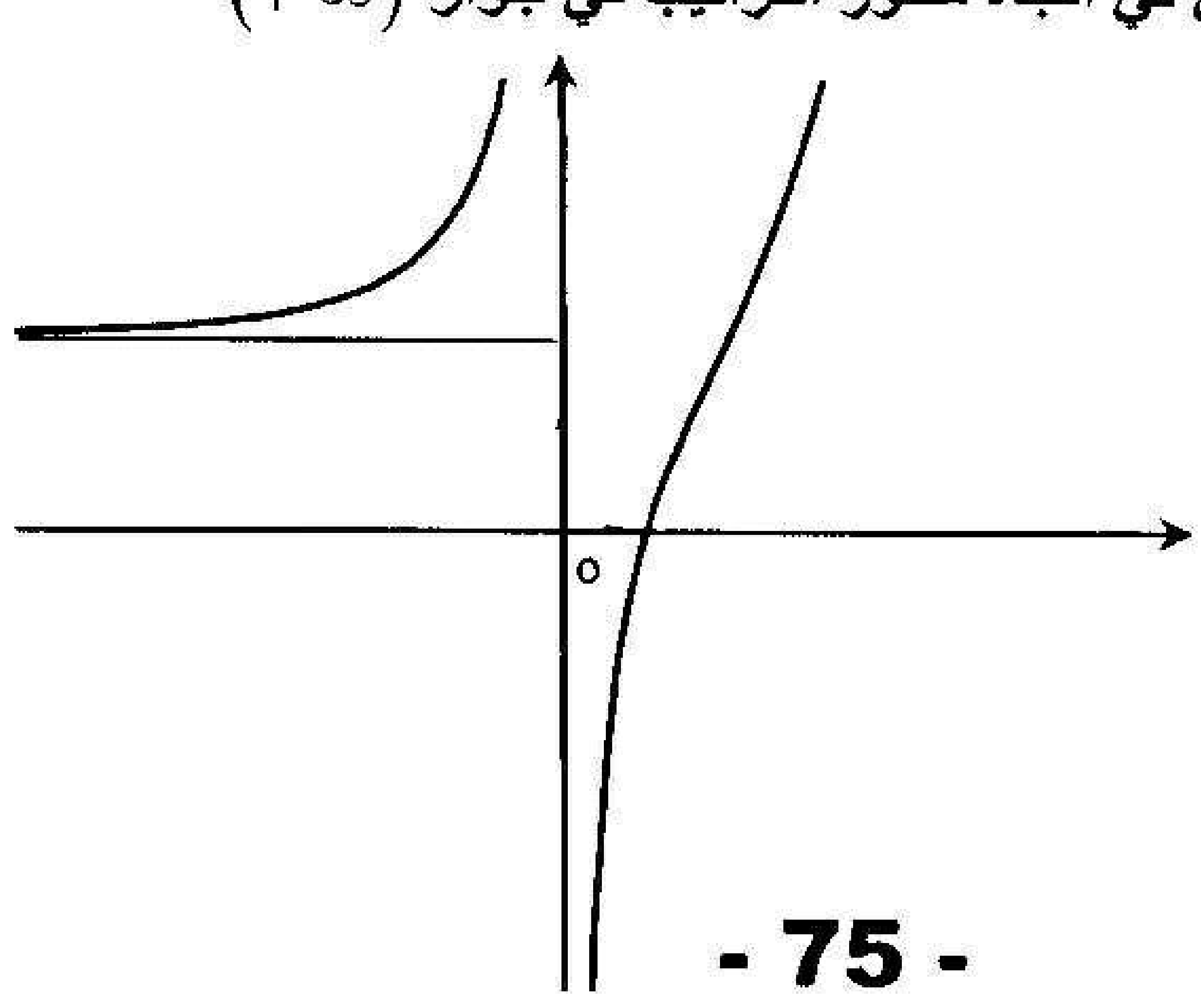
جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$4 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ هو مستقيم مقارب للمنحني
- المستقيم ذو المعادلة $y = 4$ هو مستقيم مقارب في جوار $(-\infty)$
- المنحني له فرع قطع مكافئ في اتجاه محور التراتيب في جوار $(+\infty)$

المنحني :



7) $f(x)=2x+1-\dfrac{2e^{x}}{e^{x}+1}$

مجموعة التعريف : $D_f=]-\infty,\ +\infty[$

حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

حساب المشتق : من أجل كل $x\in D_f$: $f'(x)=\dfrac{2\left(e^{2x}+e^{x}+1\right)}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$

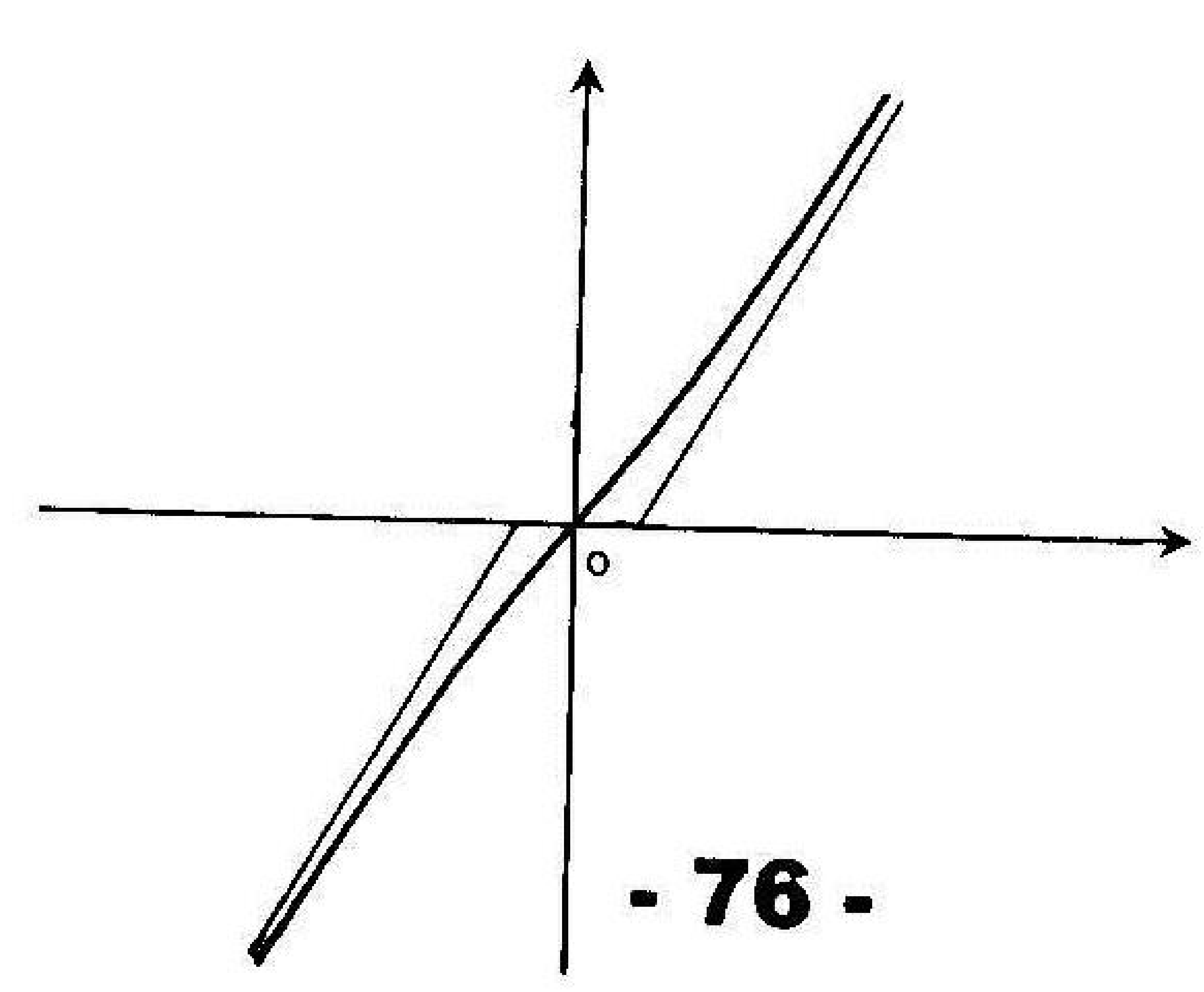
جدول التغيرات :

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $y=2x+1$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(-\infty)$.
- المستقيم ذو المعادلة $y=2x-1$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(+\infty)$.

المنحني :



$$f(x)=\frac{e^{x}}{e^{2x}+e^{x}+1}\ (8$$

<u>مجموعة التعريف</u> : $D_f=]-\infty,\ +\infty[$

<u>حساب النهايات</u> : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

<u>حساب المشتق</u> : من أجل كل $x\in D_f$:

$$f'(x)=\frac{e^{x}\left(1-e^{2x}\right)}{\left(e^{2x}+e^{x}+1\right)^{2}}$$

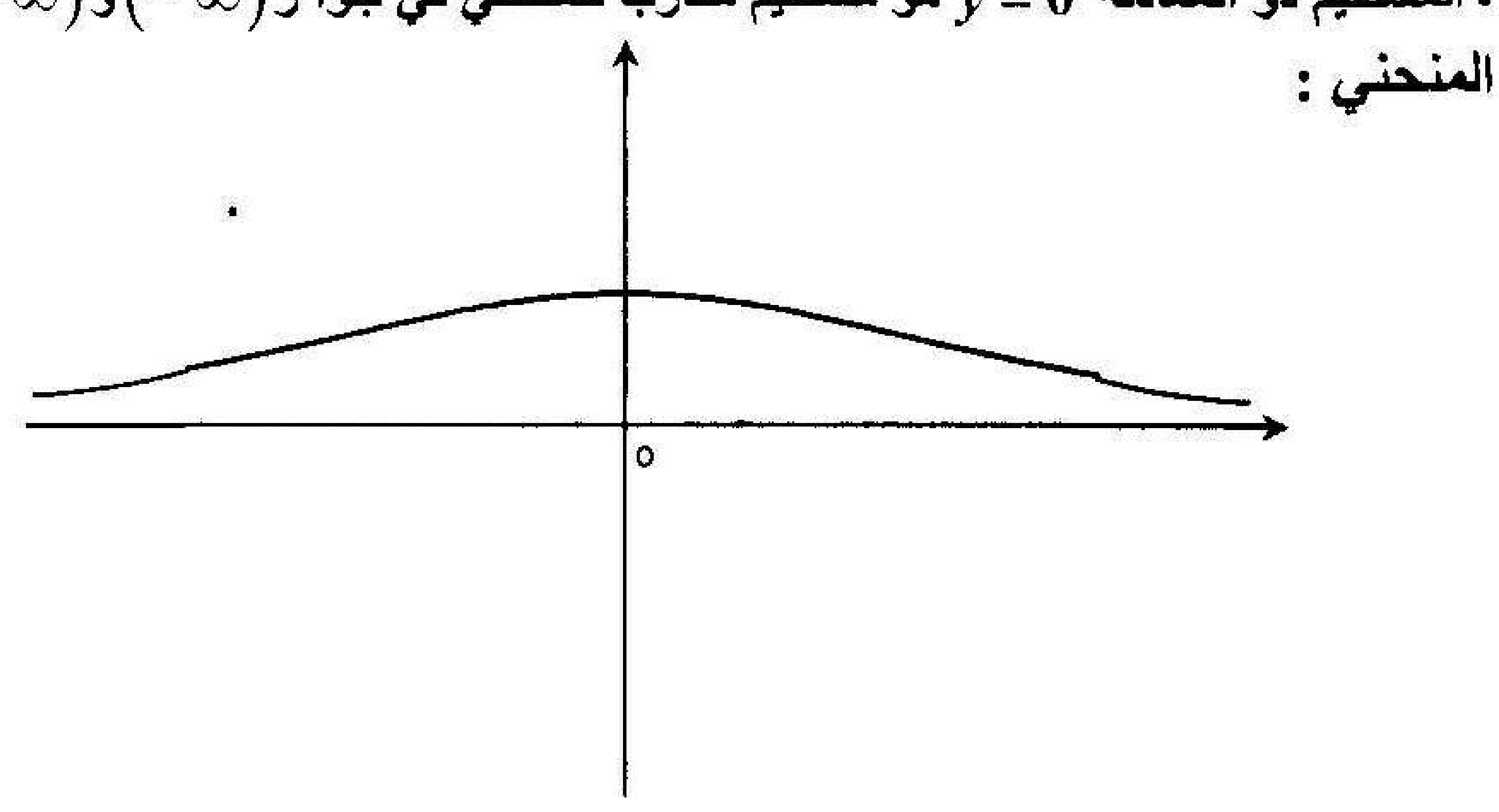
<u>جدول التغيرات</u> :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$1/3$	↘	0

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $y=0$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوا ر $(-\infty)$ و $(+\infty)$

المنحني :



$$f(x)=\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{e^x+1} \quad (9$$

مجموعة التعريف : $D_f=]-\infty,\ 0[\cup]0,\ +\infty[$

حساب النهايات :

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ $\qquad \lim_{x\overset{<}{\to}0} f(x)=-\infty$ $\qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-2$

$\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=+\infty$

حساب المشتق : من أجل كل $x\in D_f$:
$$f'(x)=\frac{-4e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^2}$$

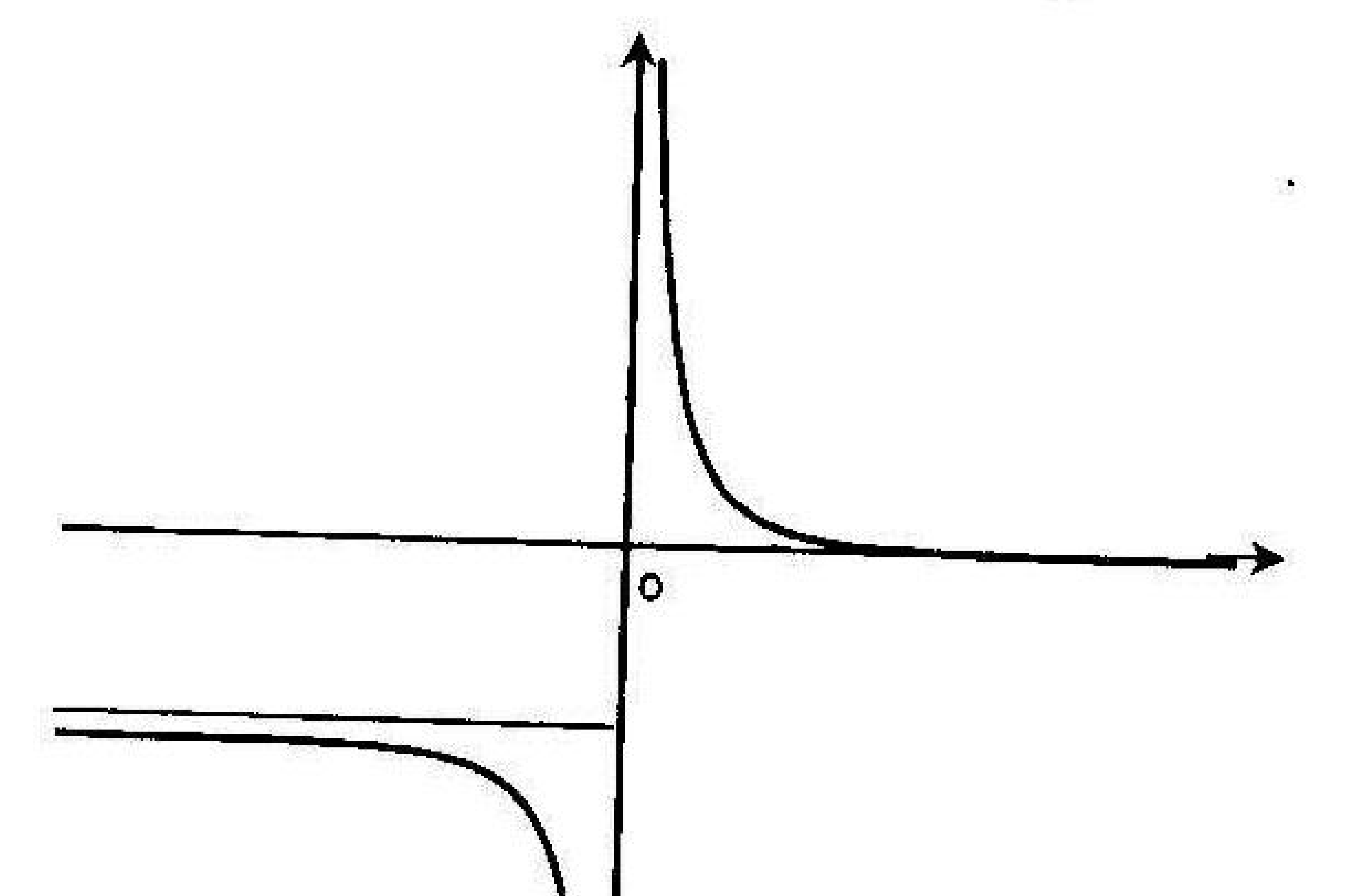
جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	-2 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $x=0$ هو مستقيم مقارب للمنحني
- المستقيم ذو المعادلة $y=-2$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(-\infty)$
- المستقيم ذو المعادلة $y=0$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(+\infty)$

المنحني :



$f(x)=(x-2)e^{x}+xe^{-x}$ (10

مجموعة التعريف : $D_f=]-\infty,\ +\infty[$

حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

حساب المشتق : من أجل كل $x\in D_f$: $f'(x)=(x-1)(e^{x}-e^{-x})$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$f(1)$	↗	$+\infty$

الفروع اللانهائية :

المنحني له فرع قطعٍ مكافئ في اتجاه محور التراتيب (yy') في جوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$

المنحني :

$f(x)=(x-1)e^{\frac{1}{x}}$ (11

مجموعة التعريف : $D_f=]-\infty,\ 0[\cup]0,\ +\infty[$

حساب النهايات :

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\overset{<}{\to}0} f(x)=0$

$\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

حساب المشتق : من أجل كل $x\in D_f$: $f'(x)=\left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$

جدول التغيرات :

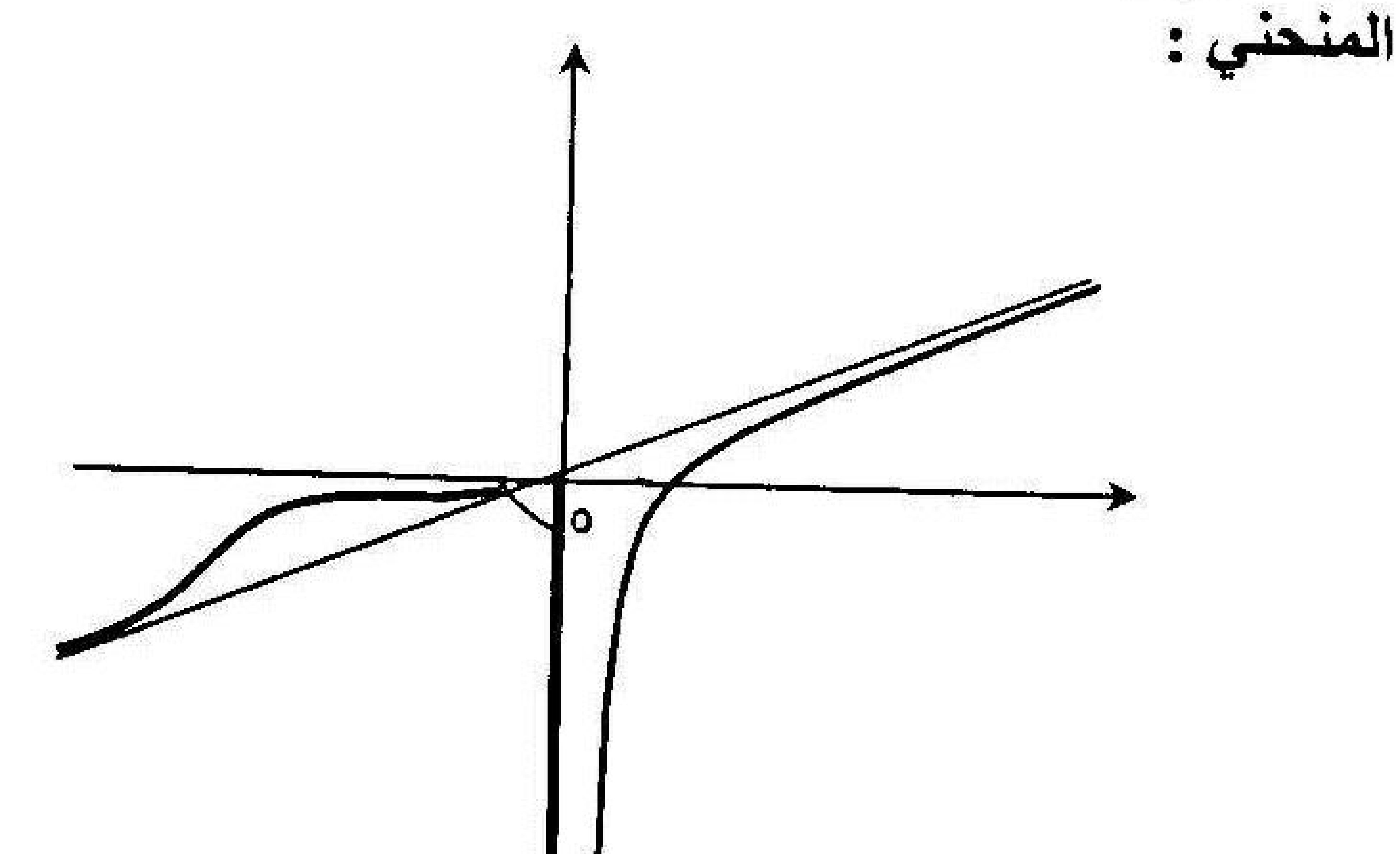
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow 0$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

الفروع اللانهائية :

المستقيم ذو المعادلة $y=x$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$

- المستقيم ذو المعادلة $x=0$ هو مستقيم مقارب للمنحني علي يمين الصفر

المنحني :



$f(x)=2^x+3e^x-2=e^{x\ln 2}+3e^x-2$ (12

مجموعة التعريف : $D_f=]-\infty,\ +\infty[$

حساب النهايات :

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ 	$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-2$

حساب المشتق : من أجل كل $x\in D_f$: $f'(x)=\ln 2\times e^{x\ln x}+3e^x$

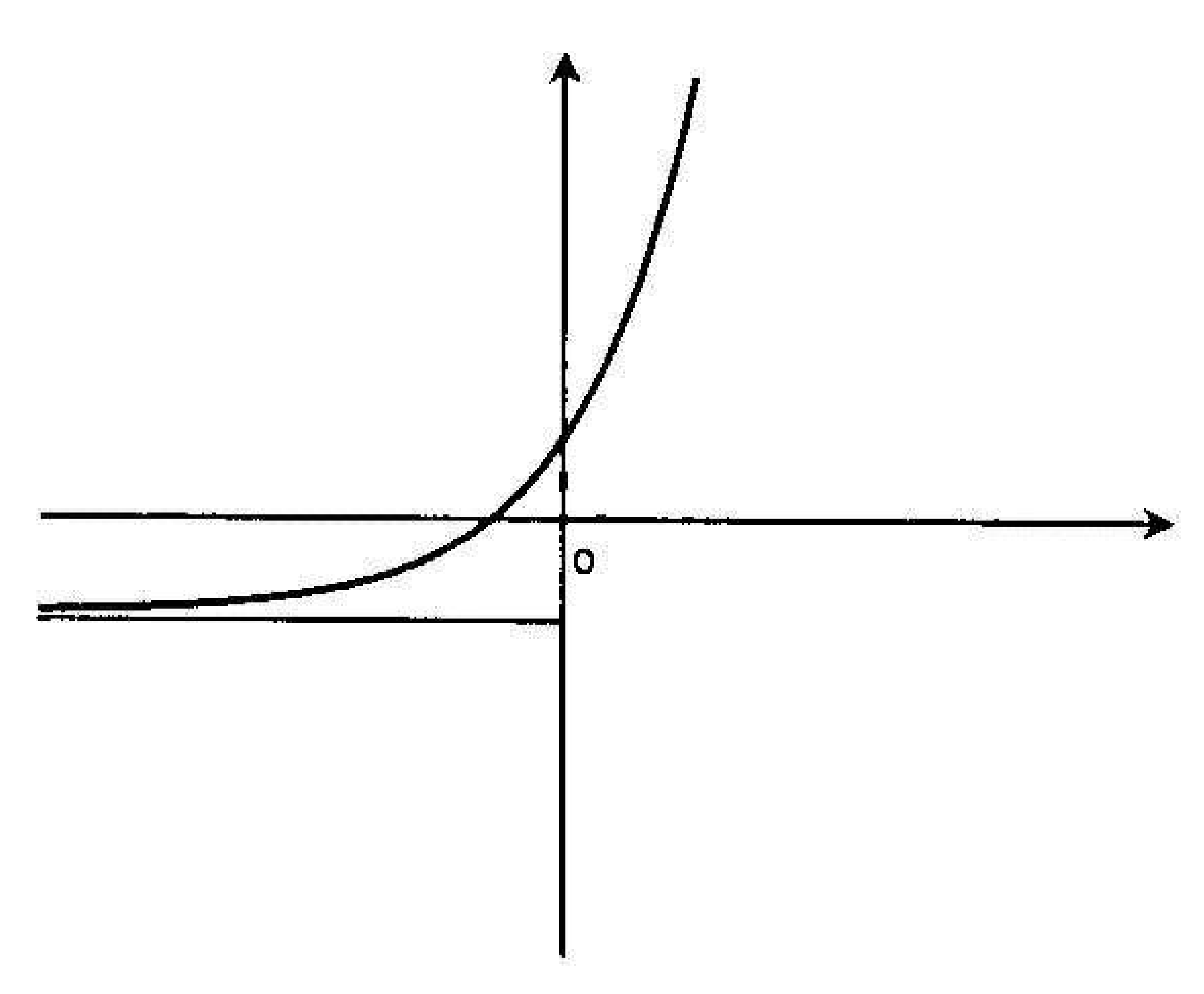
جدول التغيرات :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	-2 ↗ $+\infty$

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $y=-2$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(-\infty)$.
- المنحني له فرع قطع مكافئ في اتجاه محور التراتيب (yy') في جوار $(+\infty)$

المنحني :



مسائل محلولة

مسألة 1 :

I) لتكن الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=\frac{x^2}{2}+1-e^{-x}$ و ليكن (C) منحنيها البياني

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أدرس تغيرات الدالة f .

2) أ- بين أن المنحني (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها .

ب – أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (C) عند نقطة الانعطاف .

3) نريد تحديد وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى (Δ)، نضع $h(x)=f(x)-x$.

أ- احسب $h'(x)$ ثم $h''(x)$ و استنتج إشارة $h'(x)$.

ب - استنتج تغيرات الدالة h و إشارة $h(x)$.

جـ - استنتج وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) .

4) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C) .

5) أرسم المنحنى (C) و المستقيم (Δ) .

6) احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و المستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=2$.

II) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و المعرفة بـ : $u_n=f(n)-\frac{n^2}{2}$.

1) بين أن (u_n) هي متتالية متزايدة.

2) هل (u_n) متتالية متقاربة ؟

3) نضع $S_n=u_1+u_2+...+u_n$. احسب S_n و $\lim S_n$ عندما $n\to+\infty$.

الحـل

I) 1) دراسة تغيرات الدالة f

<u>مجموعة التعريف :</u> $D_f=]-\infty\ ;\ +\infty[$

حساب النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{2}+1-e^{-x}\right)=\lim_{x\to-\infty} e^{-x}\left(\frac{1}{2}x^2e^x+e^x-1\right)$$

(بوضع $x=2K$ ، $x\to-\infty$ فإن $K\to-\infty$)

لدينا : $\lim_{x\to-\infty} x^2e^x=\lim_{x\to-\infty}(2K)^2\times e^{2K}=\lim_{x\to-\infty}4\left(K\times e^K\right)^2=0$

ومنه: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^{-x}\left(\frac{1}{2}x^2e^x+e^x-1\right)=\lim_{x\to-\infty} e^{-x}(-1)=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

حساب المشتق ودراسة الدالة:

لكل x من D : $f'(x)=x+e^{-x}>0$ لأن $(-x)<e^{-x}$ من أجل كل عدد $x\in\mathbb{R}$)

جدول التغيرات :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

2) أ- إثبات أن المنحني (C) يقبل نقطة انعطاف:

لكل x من D : $f''(x)=\left(x+e^{-x}\right)'=1-e^{-x}$

$f''(x)=1-e^{-x}=0$ يكافئ $e^{-x}=1$ ومنه $x=0$.

$f''(x)<0$ يكافئ $x\in\left]-\infty\ ;\ 0\right[$

$f''(x)>0$ يكافئ $x\in\left]0\ ;\ +\infty\right[$

بما أن $f''(x)$ ينعدم عند $x=0$ و مغيرا إشارته فالنقطة $(0;f(0))$ هي نقطة انعطاف .

لدينا $f(0)=0$ ومنه $O(0;0)$ هي نقطة انعطاف للمنحني (C) .

ب- معادلة المماس (Δ) للمنحني (C) عند النقطة $O(0;0)$.

$y = f'(0)(x-0) + f(0) = x$ ، معادلة (Δ) هي : $y = x$.

3) أ – حساب $h'(x)$ و $h''(x)$ و استنتاج إشارة $h'(x)$.

$$h'(x) = \left(\frac{x^2}{2} + 1 - e^{-x} - x\right)' = x + e^{-x} - 1$$

$$h''(x) = 1 - e^{-x} = f''(x)$$

<u>جدول التغيرات:</u>

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h''(x)$	-	0	+
$h'(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

نستنتج من جدول تغيرات الدالة h' أنه لكل عدد x من $\mathbb{R}$: $h'(x) \geq 0$.

ب- دراسة تغيرات الدالة h و إشارة $h(x)$:

لدينا : $h(x) = \frac{x^2}{2} + 1 - e^{-x} - x$ ومنه $D_h =]-\infty \ ; \ +\infty[$

<u>حساب النهايات</u> :

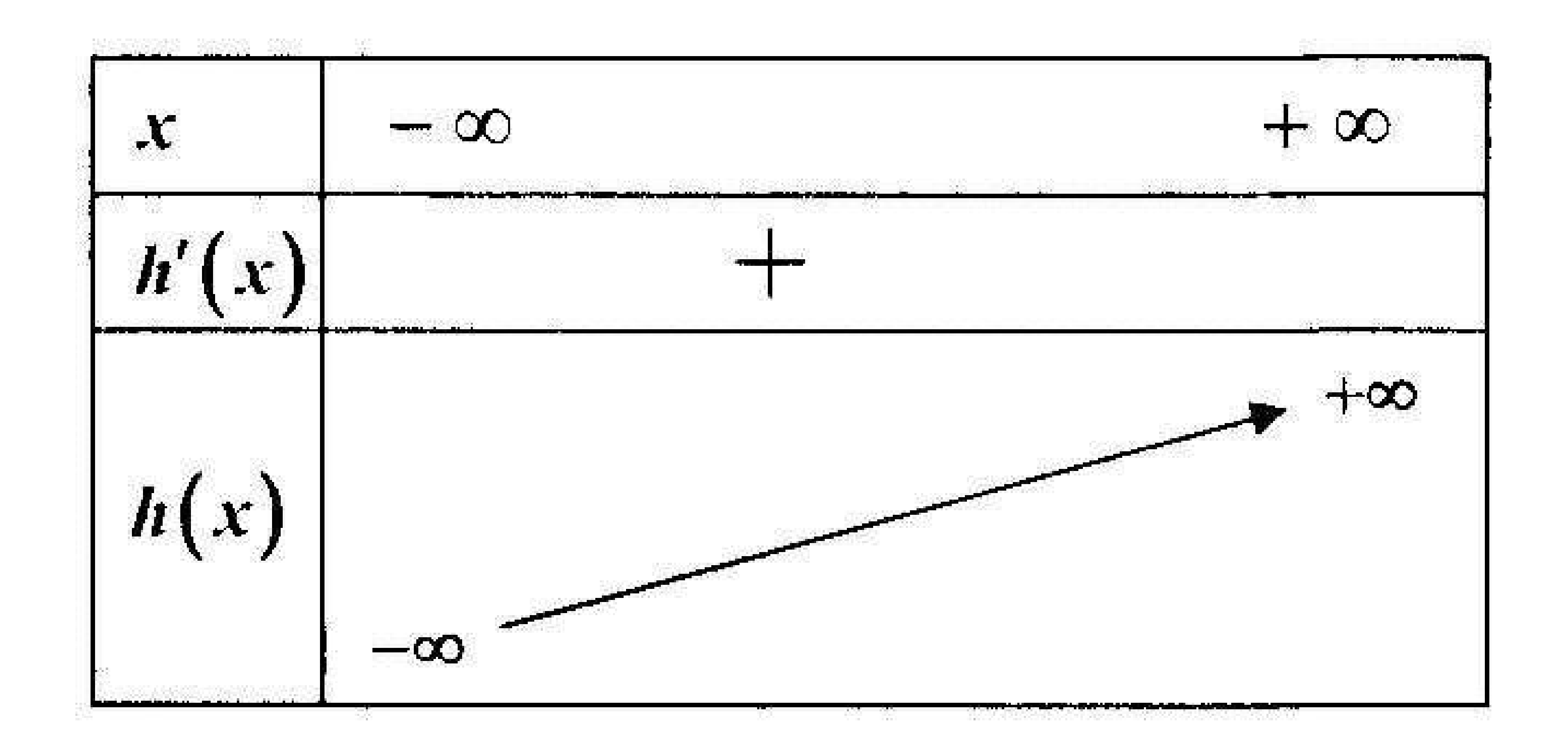
$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{-x}\left(\frac{1}{2}x^2 e^x + e^x - xe^x - 1\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x^2}{2} + 1 - e^{-x} - x\right) = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x^2}{2} - x + 1\right) = +\infty$$

(لأن $e^{-x} \to 0$ لما $x \to +\infty$)

<u>المشتق:</u>

لدينا : $h'(x) > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$.



x	$-\infty$ $+\infty$
$h'(x)$	$+$
$h(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

من جدول تغيرات الدالة h نستنتج أن $h(x)<0$ من أجل $x\in\left]-\infty\ ;\ 0\right[$

و $h(x)>0$ من أجل $x\in\left]0\ ;\ +\infty\right[$.

جـ - استنتاج وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى (Δ) :

(C) تحت المستقيم (Δ) يكافئ $f(x)-x<0$ يكافئ $h(x)<0$ ومنه $x\in\left]-\infty\ ;\ 0\right[$.

(C) فوق المستقيم (Δ) يكافئ $h(x)>0$ ومنه $x\in\left]0\ ;\ +\infty\right[$.

4) دراسة الفروع اللانهائية للمنحنى (C) :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{x}-\frac{e^{-x}}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}x\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2e^x}\right)=+\infty$$

(لأن $x^2e^x\to0^+$ و $-\frac{1}{x^2e^x}\to-\infty$ لما $x\to-\infty$)

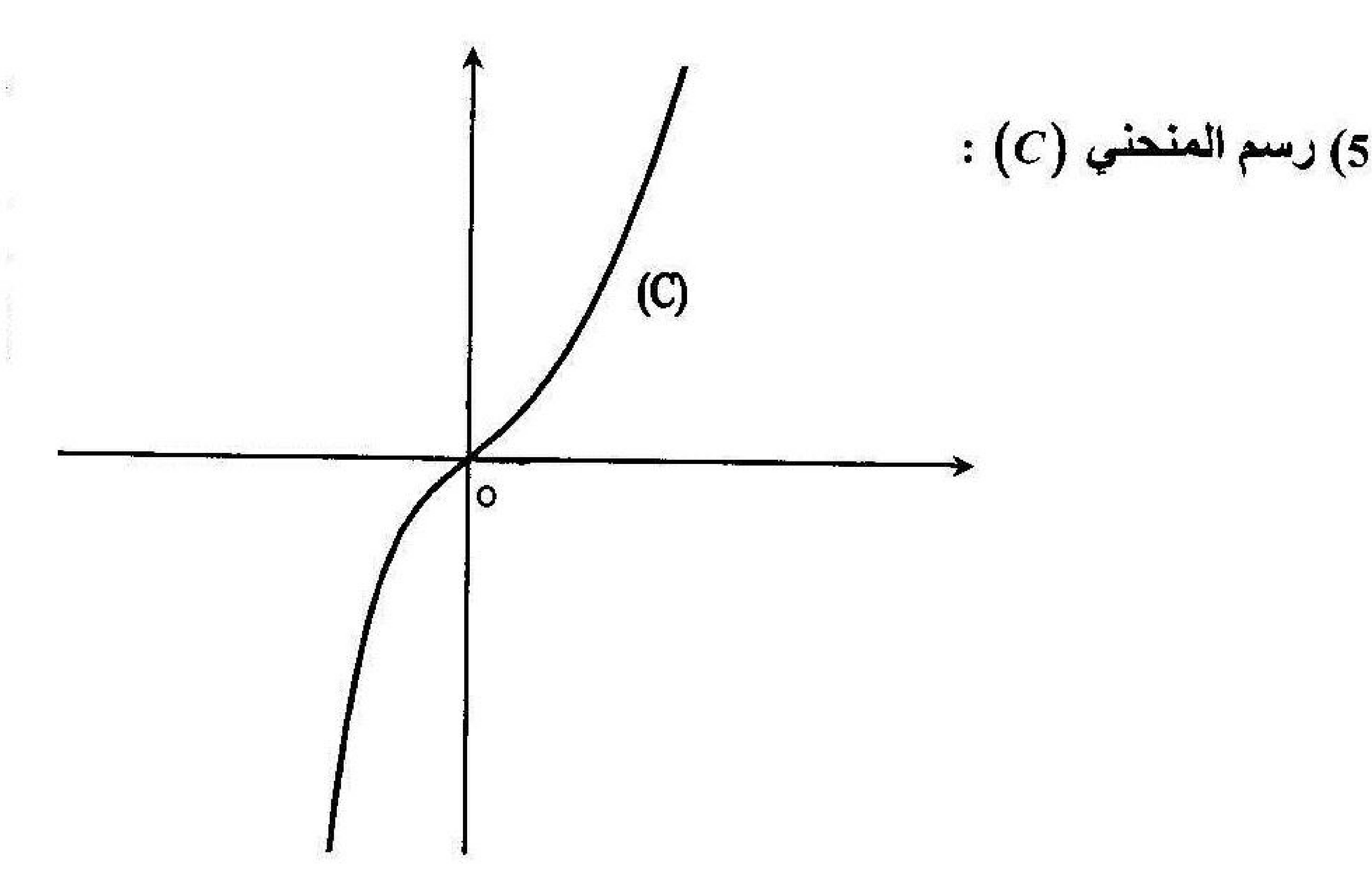
ومنه المنحني (C) يقبل فرع قطع مكافئ في اتجاه $(y'y)$ في جوار $-\infty$)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{x}-\frac{e^{-x}}{x}\right)=+\infty$$

(لأن $e^{-x}\to0$ و $\frac{1}{x}\to0$ لما $x\to+\infty$)

ومنه المنحني (C) يقبل فرع قطع مكافئ في اتجاه $(y'y)$ في جوار $+\infty$)

5) رسم المنحني (C) :



6) حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) و (Δ)

و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=2$:

$$S=\int_0^2\left[f(x)-x\right]dx=\int_0^2\left[\frac{x^2}{2}+1-e^{-x}-x\right]dx$$

$$=\left[\frac{1}{6}x^3+x+e^{-x}-\frac{x^2}{2}\right]_0^2=\left[\left(\frac{4}{3}+e^{-2}\right)-1\right](u.a)=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{e^2}\right)(u.a)$$

II) 1) البرهان بأن (u_n) متتالية متزايدة:

لدينا : $u_n=f(n)-\frac{n^2}{2}=1-e^{-n}$

$$u_{n+1}-u_n=\left(1-e^{-(n+1)}\right)-\left(1-e^{-n}\right)$$

$$=e^{-n}-e^{-n-1}=e^{-n}\left(1-e^{-1}\right)=e^{-n}\left(1-\frac{1}{e}\right)>0$$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1}-u_n>0$ ، إذن المتتالية (u_n) متزايدة .

2)هل المتتالية (u_n) متقاربة؟

$\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-e^{-n}\right)=1$ إذن المتتالية (u_n) متقاربة.

3)
$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \left(1-e^{-1}\right)+\left(1-e^{-2}\right)+...+\left(1-e^{-n}\right)$$
$$= n\times 1-\left(e^{-1}+e^{-2}...+e^{-n}\right)$$

$$e^{-1}+e^{-2}...+e^{-n} = e^{-1}\times\frac{1-\left(e^{-1}\right)^n}{1-e^{-1}} = \frac{1-e^{-n}}{e-1}$$

(مجموع لـ n حد لمتتالية هندسية حدها الأول e^{-1} و أساسها $q=e^{-1}$)

$$S_n = n-\frac{1-e^{-n}}{e-1} = n+\frac{e^{-n}-1}{e-1} \text{ ، } \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$$

مسألة 2 :

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة بـ : $g(x)=(2x-3)e^{-x+2}+e$

1) برهن أن : $\lim_{x\to+\infty}(2x+b)e^{-x+2}=0 \qquad (b\in\mathbb{R})$

2) أ - أدرس تغيرات الدالة g.

ب - احسب $g(1)$ و استنتج إشارة $g(x)$.

II) لتكن الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=e(x-2)+3-(2x-1)e^{-x+2}$

و ليكن (C) المنحني البياني الممثل للدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أدرس تغيرات الدالة f.

2) برهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $x_0\in\left]0\ ;\ \frac{1}{2}\right[$

3) أ - برهن أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=e\times x-2e+3$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C).

ب - أدرس وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى (D).

4) أنشئ المنحني (C).

5) ليكن $\lambda>2$.احسب المساحة $S(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بمجموعة النقط $M(x;y)$ حيث $2\le x\le\lambda$ و $f(x)\le y\le e\times x-2e+3$.

هل $S(\lambda)$ تقبل نهاية عندما $\lambda\to+\infty$ ؟

الحـل

1) إثبات أن : $\lim_{x\to+\infty}(2x+b)e^{-x+2}=0$

$$\lim_{x\to+\infty}(2x+b)e^{-x+2}=\lim_{x\to+\infty}e^2\times\left(2\frac{x}{e^x}+\frac{b}{e^x}\right)=0$$

(لأن $\frac{x}{e^x}\to 0$ و $\frac{b}{e^x}\to 0$ لما $x\to+\infty$)

2) أ- دراسة تغيرات الدالة g :

مجموعة التعريف : $D_g=]-\infty\ ;\ +\infty[$

حساب النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}(2x-3)e^{-x+2}+e=e$$

حساب المشتق ودراسة إشارته:

لكل x من D_g : $g'(x)=2\times e^{-x+2}-e^{-x+2}(2x-3)=(5-2x)e^{-x+2}$

لكل x من D_g : $e^{-x+2}>0$ فإشارة $g'(x)$ هي إشارة $(5-2x)$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{2}{\sqrt{e}}+e$	↘	e

ب- حساب $g(1)$ و إشارة $g(x)$:

$g(1)=-e+e=0$. من جدول التغيرات الدالة g نستنتج ما يلي :

$g(x)<0$ إذا كان $x\in]-\infty\ ;\ 1[$ و $g(x)>0$ إذا كان $x\in]\ 1;+\infty\ [$

II) - 1) دراسة تغيرات الدالة f :

<u>مجموعة التعريف</u> : $D_f =]-\infty \; ; \; +\infty[$

<u>حساب النهايات:</u>

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e \times (x-2) + 3 - (2x-1)e^{-x+2}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} (2x-1)\left[e \times \frac{x-2}{2x-1} - e^{-x+2}\right] + 3 = +\infty$$

(لأن $\frac{x-2}{2x-1} \to \frac{1}{2}$ و $2x-1 \to -\infty$ و $e^{-x+2} \to +\infty$ لما $x \to -\infty$)

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (لأن $(2x-1)e^{-x+2} \to 0$ لما $x \to +\infty$)

<u>حساب المشتق ودراسة إشارته:</u> لكل x من D_f :

$$f'(x) = e - \left[2 \times e^{-x+2} - e^{-x+2}(2x-1)\right] = (2x-3)e^{-x+2} + e = g(x)$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$(3-2e)$	↗ $+\infty$

2) - إثبات أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $x_0 \in \left]0 \; ; \; \frac{1}{2}\right[$:

$f(0) = e^2 - 2e + 3 > 0$ ، $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 - \frac{3}{2}e < 0$ على المجال $\left[0; \frac{1}{2}\right]$

الدالة f مستمرة و متناقصة تماما والعدد0 محصور بين $f(0)$ و $f(1/2)$ ، حسب

مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $x_0 \in \left]0 \; ; \; \frac{1}{2}\right[$.

3) أ - إثبات أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = e \times x - 2e + 3$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C) :

$$\lim_{x \to +\infty}\left[f(x) - (e \times x - 2e + 3)\right] = \lim_{x \to +\infty} -(2x-1)e^{-e+2} = 0$$

إذن المستقيم (D) هو مستقيم مقارب للمنحني (C) في جوار $+\infty$.

ب- دراسة وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى (D):

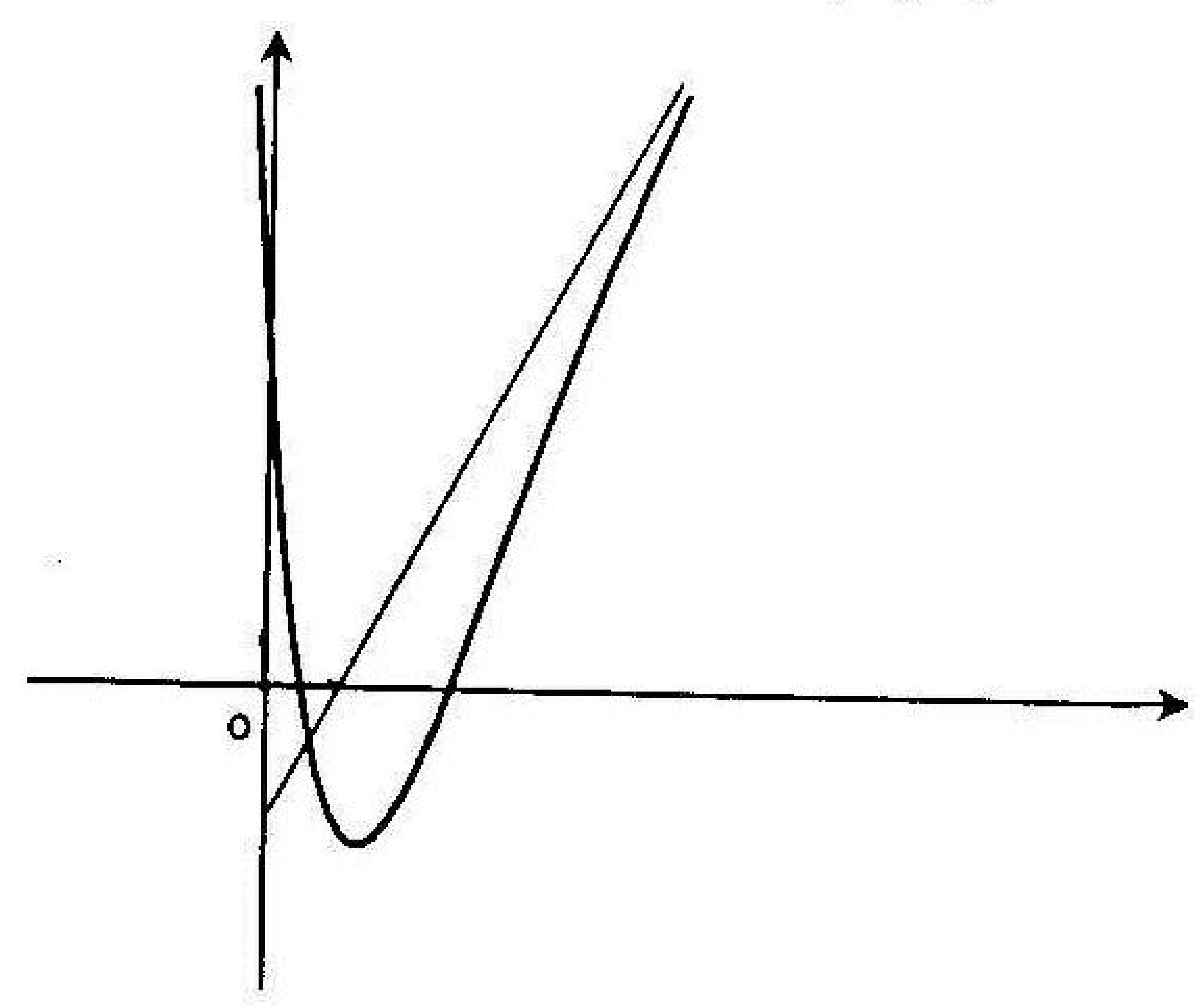
$$f(x) - (e \times x - 2e + 3) = -(2x-1)e^{-e+2}$$

لكل عدد حقيقي x : $e^{-x+2} > 0$ ومنه :

(C) فوق المستقيم (D) يكافئ $-(2x-1) > 0$ أي إذا كان $x < \frac{1}{2}$.

(C) تحت المستقيم (D) يكافئ $-(2x-1) < 0$ أي إذا كان $x > \frac{1}{2}$.

4) إنشاء المنحني (C) :



5) حساب المساحة $S(\lambda)$:

$$S(\lambda)=\int_2^{\lambda}\left[(ex-2e+3)-f(x)\right]dx=\int_2^{\lambda}(2x-1)e^{-x+2}dx$$

نستعمل المكاملة بالتجزئة لحساب $S(\lambda)$ ، بوضع $u(x)=2x-1$

ومنه $u'(x)=2$ و $v'(x)=e^{-x+2}$ ومنه $v(x)=-e^{-x+2}$ ومنه :

$$\int_2^{\lambda}(2x-1)e^{-x+2}dx=\left[-(2x-1)e^{-x+2}\right]_2^{\lambda}+2\int_2^{\lambda}e^{-x+2}dx$$

$$=\left[-(2x-1)e^{-x+2}-2e^{-x+2}\right]_2^{\lambda}$$

$$=\left[-(2x+1)e^{-x+2}\right]_2^{\lambda}=-(2\lambda+1)e^{-\lambda+2}+5(u.a)$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}S(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}-(2\lambda+1)e^{-\lambda+2}+5=5(u.a)$$

(لأن $\lim_{\lambda\to+\infty}(2\lambda+1)e^{-\lambda+2}=0$ أنظر $I-1$)

مسألة 3 :

I) لتكن الدالة f_m المعرفة بـ: $f_m(x)=mx+1-\dfrac{e^x}{e^x-m}$ حيث $m\in\mathbb{R}^+$

نرمز بـ (C_m) إلى منحنى الدالة f_m في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس

1) برهن أن f_m تكتب على الشكل $f_m(x)=mx-\dfrac{m}{e^x-m}$.

2) أ- عين مجموعة تعريف الدالة f_m .

ب- أدرس تغيرات الدالة f_m من أجل $m<0$ و $m>0$.

3) أ عين حسب قيمة الوسيط m المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_m) .

ب- عين قيم m التي يكون من أجلها محور التراتيب مستقيما مقاربا للمنحنى (C_m) .

II) نعتبر الدالة $f_1\ (m=1)$ و المعرفة بـ $f_1(x)=x+1-\dfrac{e^x}{e^x-1}$ و ليكن

(C_1) منحنيها البياني في المعلم السابق (طول الوحدة $2cm$)

1) أدرس تغيرات الدالة f_1 (يمكنك استعمال نتائج الجزء 1)

2) أ - برهن أن النقطة $A\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحني (C_1) .

ب- احسب $f_1(\ln 2)$ ، $f_1(\ln 8)$.

جـ - أكتب معادلة المماس للمنحني (C_1) عند النقطة ذات الفاصلة $x = \ln 2$.

د ـ أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (C_1) .

3) أنشئ المنحني (C_1) .

4) ليكن λ عدد حقيقي بحيث $\lambda > \ln 8$. احسب بـ cm^2 المساحة $S(\lambda)$ لمجموعة النقط $N(x;y)$ من المستوي حيث: $\begin{cases} \ln 8 \le x \le \lambda \\ f(x) \le y \le x \end{cases}$

III) نعتبر التناظر المركزي S الذي مركزه A .

1) عين العبارة المركبة ثم العبارة التحليلية للتناظر S .

2)برهن بأن المنحني (C_1) صامد إجمالا بالتحويل S .

الحـل

1) إثبات أن $f_m(x) = mx - \dfrac{m}{e^x - m}$:

لدينا $f_m(x) = mx + 1 - \dfrac{e^x}{e^x - m} = mx + \dfrac{e^x - m - e^x}{e^x - m} = mx - \dfrac{m}{e^x - m}$

2) أ ـ تعيين مجموعة تعريف : f_m معرفة إذا كان $e^x - m \ne 0$.

إذا كان $m < 0$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x - m \ne 0$

و تكون مجموعة التعريف : $D =]-\infty \; ; \; +\infty[$

إذا كان $m > 0$ فإن $e^x - m \ne 0$ $e^x \ne m$ ومنه $x \ne \ln m$

و تكون مجموعة التعريف : $D =]-\infty \; ;\ln m[\cup]\ln m + \infty[$

ب- دراسة تغيرات الدالة f_m :

<u>الحالة الأولى:</u> $m < 0$

<u>مجموعة التعريف :</u> $D =]-\infty \; ; \; +\infty[$

<u>حساب النهايات:</u>

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x) = -\infty$ (لأن $\dfrac{e^x}{e^x - m} \to 1$ لما $x \to +\infty$

حساب المشتق ودراسة إشارته:

لكل x من D :

$$f'_m(x) = m - \frac{e^x\left(e^x - m\right) - e^{2x}}{\left(e^x - m\right)^2} = m\left(1 + \frac{e^x}{\left(e^x - m\right)^2}\right) < 0$$

(لأن $m < 0$ و $1 + \frac{e^x}{\left(e^x - m\right)^2} > 0$)

جدول تغيرات الدالة f_m :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	
$f_m(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$

الحالة الثانية: $m > 0$

مجموعة التعريف : $D = \left]-\infty\ ;\ \ln m\right[\cup \left]\ln m\ ;\ +\infty\right[$

حساب النهايات:

$$\lim_{x \to -\infty} f_m(x) = -\infty \quad ، \quad \lim_{\substack{x \to \ln m \\ >}} f_m(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to \ln m \\ <}} f_m(x) = +\infty \quad ، \quad \lim_{x \to +\infty} f_m(x) = +\infty$$

المشتق:

لكل x من D : $f'_m(x) = m\left(1 + \frac{e^x}{\left(e^x - m\right)^2}\right) > 0$ (لأن $m > 0$)

جدول تغيرات الدالة f_m :

x	$-\infty$		$\ln m$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$+$	‖	$+$	
$f_m(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

3) أ ـتعيين المستقيمات المقاربة حسب قيم m :

الحالة الأولى: $m < 0$

- المستقيم ذو المعادلة $y = mx + 1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_m) في جوار $(-\infty)$

- المستقيم ذو المعادلة $y = mx$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_m) في جوار $(+\infty)$.

الحالة الثانية: $m > 0$

- المستقيم ذو المعادلة $x = \ln m$ هومستقيم مقارب للمنحني (C_m)

- المستقيم ذو المعادلة $y = mx + 1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_m) في جوار $(-\infty)$

- المستقيم ذو المعادلة $y = mx$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_m) في جوار $(+\infty)$.

ب- تعيين قيمة m حتى يكون محور التراتيب $(x = 0)$ مستقيما مقاربا للمنحنى (C_m) :

يكون المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مستقيما مقاربا للمنحنى (C_m) إذا كانت:

$\lim\limits_{x \to 0} f_m(x) = -\infty$ أو $\lim\limits_{x \to 0} f_m(x) = +\infty$.

إذن $\lim\limits_{x \to 0} e^x - m = 0$ ومنه $e^0 - m = 0$ ومنه : $m = 1$.

II) 1-) دراسة تغيرات الدالة $f_1(m = 1)$:

بتعويض الوسيط m بالقيمة1 (في الحالة الثانية $m > 0$)نحصل على تغيرات الدالة f_1

مجموعة التعريف : $D =]-\infty \;;0[\cup]0;+\infty[$

حساب النهايات:

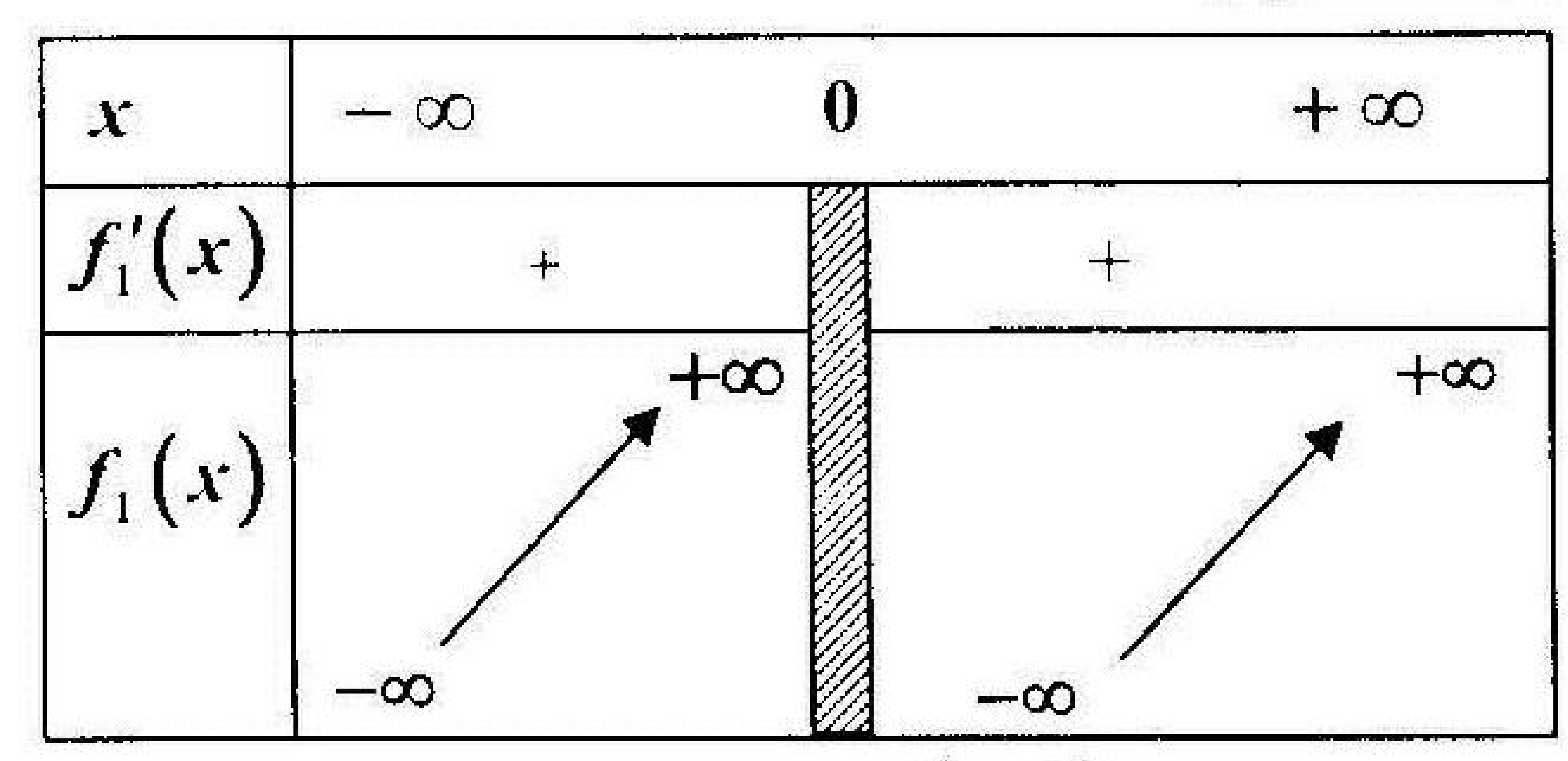
$\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f_1(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f_1(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty$

__المشتق:__

$$f_1'(x) = 1 + \frac{e^x}{\left(e^x - 1\right)^2} > 0 \quad .$$

__جدول تغيرات الدالة__ f_1 :



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f_1(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

2) أ- إثبات أن النقطة $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحني $\left(C_1\right)$:

لكل x من D :

$$f_1(-x) + f_1(x) = -x + 1 - \frac{e^{-x}}{e^{-x} - 1} + x + 1 - \frac{e^x}{e^x - 1}$$

$$= 2 - \frac{e^{-x}}{e^{-x} - 1} - \frac{e^x}{e^x - 1} = 2 - \frac{e^x}{e^x - 1} + \frac{1}{e^x - 1}$$

$$= 2 - \frac{e^x - 1}{e^x - 1} = 2 - 1 = 1$$

بما أن : $f_1(-x) + f_1(x) = 1$ فالنقطة $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحني $\left(C_1\right)$

ب- حساب $f_1(\ln 2)$ ، $f_1(\ln 8)$

$$f_1(\ln 2) = 1 + \ln 2 - \frac{e^{\ln 2}}{e^{\ln 2} - 1} = 1 + \ln 2 - \frac{2}{2-1} = -1 + \ln 2$$

$$f_1(\ln 8) = 1 + \ln 8 - \frac{8}{7} = -\frac{1}{7} + \ln 8$$

جـ -كتابة معادلة المماس للمنحني $\left(C_1\right)$ عند النقطة ذات الفاصلة $x = \ln 2$:

$$y = f_1'(\ln 2)(x - \ln 2) + f_1(\ln 2) = 3(x - \ln 2) - 1 + \ln 2$$
$$= 3x - 1 - 2\ln 2$$

د ـ الفروع اللانهائية للمنحني (C_1) :

من الدراسة السابقة (الجزء 1) و بتعويض $m = 1$ نجد:

المستقيم $x = 0$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C_1). المستقيم ذو المعادلة $y = x + 1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C_1) في جوار $(-\infty)$. المستقيم ذو المعادلة $y = x$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C_1) في جوار $(+\infty)$.

3) إنشاء المنحني (C_1):

4) حساب المساحة $S(\lambda)$:

$$\int_{\ln 8}^{\lambda}[x - f_1(x)]dx = \int_{\ln 8}^{\lambda}\left[-1 + \frac{e^x}{e^x - 1}\right]dx$$

$$-\int_{\ln 8}^{\lambda}dx + \int_{\ln 8}^{\lambda}\frac{e^x}{e^x - 1}dx = [-x]_{\ln 8}^{\lambda} + \left[\ln\left(e^x - 1\right)\right]_{\ln 8}^{\lambda}$$

$$\left[(-\lambda + \ln 8) + \ln\left(e^{\lambda} - 1\right) - \ln 7\right] \times 4cm^2 = \left[-\lambda + \ln\frac{8\left(e^{\lambda} - 1\right)}{7}\right] \times 4cm^2$$

III) - 1) العبارة المركبة و العبارة التحليلية للتناظر S :

نعلم أن العبارة المركبة للتناظر المركزي هي من الشكل : $z' = -z + \beta$

$A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ مركز التناظر معناه $S(A) = A$ يكافئ $\frac{1}{2}i = -\frac{1}{2}i + \beta$

ومنه $\beta = i$ ومنه : $z' = -z + i$ و هي العبارة المركبة للتناظر S .

لدينا $z' = -z + i$ يكافئ $x' + iy' = -(x + iy) + i$

ومنه : $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y + 1 \end{cases}$ وهي العبارة التحليلية للتناظر S.

2) إثبات أن المنحني (C_1) صامد إجمالا بالتحويل S .

التحويل S هو تناظر مركزي مركزه النقطة $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ التي هي مركز تناظر المنحني (C_1) و هذا يعني أن صورة كل نقطة من المنحني (C_1) هي نقطة تنتمي إلى المنحني (C_1) . نستنتج أن صورة المنحني (C_1) هي نفسه، أي المنحني (C_1) صامد إجمالا بالتحويل S .

توجد طريقة أخرى للإجابة على هذا السؤال (نعين معادلة صورة المنحني (C_1) بالتحويل S سنجدها مماثلة لمعادلة (C_1) ، و هذا يعني أن صورة المنحني (C_1) هي نفسه (صامد إجمالا) .

مسألة 4 :

لتكن الدالة f المعرفة بـ: $f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x+1}}$ و ليكن (C) منحنيها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ- برهن أن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = +\infty$. ب) أدرس تغيرات الدالة f .

2) أ- برهن أن $\lim x \times \left(e^{\frac{1}{x+1}} - 1\right) = 1$ لما $|x| \to +\infty$ (يمكنك وضع $u = \frac{1}{x+1}$)

ب- استنتج أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x + 2$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C)

3) أنشئ المنحني (C) .

4) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]-1 ; +\infty[$ بـ: $g(x) = \ln f(x)$.

أ- تحقق أن $g(x)=\frac{1}{x+1}+\ln(x+1)$.

ب- باستعمال دراسة تغيرات الدالة f ، استنتج تغيرات الدالة g.

جـ - أنشئ في معلم جديد متعامد ومتجانس المنحني (C') للدالة g .

5) احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C') و المستقيمات :

$y=0$ ، $x=0$ ، $x=1$.

الحـل

1)أ- إثبات أن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)=+\infty$:

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1}(x+1)e^{\frac{1}{x+1}}$ (حالة عدم تعيين $0\times\infty$ لأن: $+\infty \leftarrow$ $e^{\frac{1}{x+1}} \to +\infty$ لما $x \xrightarrow{>} -1$)

بوضع $u=\frac{1}{x+1}$ ومنه لما $x \xrightarrow{>} -1$ فإن $u \to +\infty$ ومنه :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)=\lim_{x \xrightarrow{>} -1}(x+1)e^{\frac{1}{x+1}}=\lim_{u\to+\infty}\frac{e^u}{u}=+\infty$$

ب) دراسة تغيرات الدالة f

<u>مجموعة التعريف</u> : $D_f=]-\infty\ ;-1[\cup]-1\ ;+\infty[$

<u>حساب النهايات:</u>

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ (لأن $e^{\frac{1}{x+1}} \to 1$ لما $x\to-\infty$)

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} f(x)=0$ (لأن $x+1\to 0^-$ و $\frac{1}{x+1}\to-\infty$ و $e^{\frac{1}{x+1}}\to 0$)

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

<u>حساب المشتق ودراسة إشارته:</u>

لكل x من D_f :

$$f'(x)=e^{\frac{1}{x+1}}-\frac{1}{(x+1)^2}\times e^{\frac{1}{x+1}}\times(x+1)$$

$$=e^{\frac{1}{x+1}}-\frac{1}{x+1}e^{\frac{1}{x+1}}=\left(1-\frac{1}{x+1}\right)e^{\frac{1}{x+1}}=\frac{x}{x+1}e^{\frac{1}{x+1}}$$

$f'(x)=0$ إذا كان $x=0$ ، $f'(x)>0$ يكافئ $\frac{x}{x+1}>0$

يكافئ $x(x+1)>0$ ومنه : $x\in\left]-\infty\ ;-1\right[\cup\left]-1\ ;\ +\infty\right[$

$f'(x)<0$ يكافئ $\frac{x}{x+1}<0$ يكافئ $x(x+1)<0$

ومنه : $x\in\left[-1\ ;\ 0\right[$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	1-	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	‖	-	+
$f(x)$	$-\infty \nearrow 0$	‖	$+\infty \searrow e$	$\nearrow +\infty$

2) أ- إثبات أن $\lim x\times\left(e^{\frac{1}{x+1}}-1\right)=1$ لما $|x|\to+\infty$:

$\lim\limits_{|x|\to+\infty} x\times\left(e^{\frac{1}{x+1}}-1\right)=\infty\times 0$ (حالة عدم تعيين) .

بوضع $u=\frac{1}{x+1}$ ، $u\to 0$ لما $|x|\to+\infty$

$$\lim_{|x|\to+\infty} x\times\left(e^{\frac{1}{x+1}}-1\right)=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x}{x+1}\times\frac{e^{\frac{1}{x+1}}-1}{\frac{1}{x+1}}=1\times\lim_{u\to 0}\frac{e^{u}-1}{u}=1$$

ب – استنتاج المستقيم $(D): y=x+2$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C) :

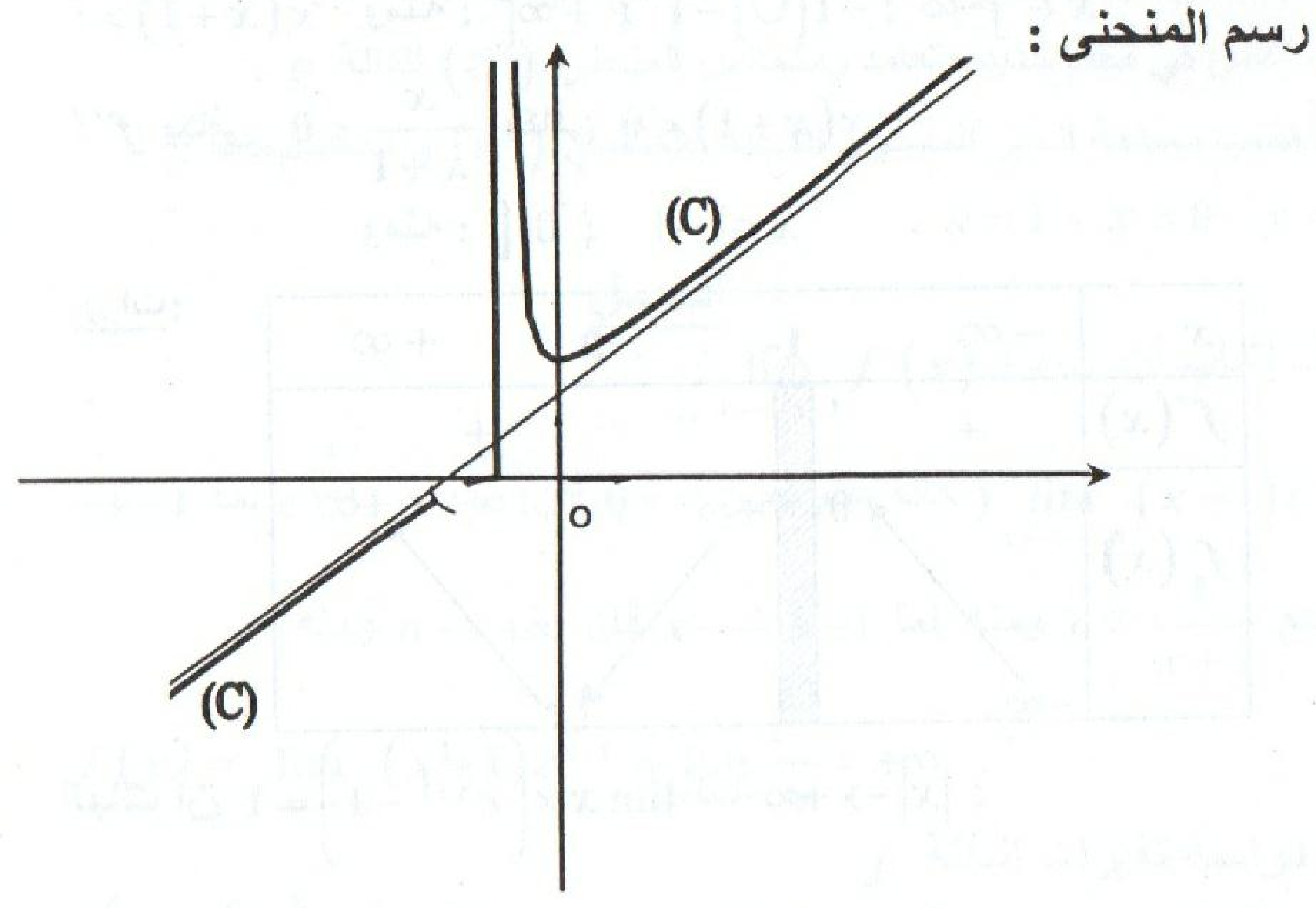
$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=\lim_{|x|\to+\infty}(x+1)e^{\frac{1}{x+1}}-(x+2)=$$

$$\lim_{|x|\to+\infty} x\times e^{\frac{1}{x+1}}-x+e^{\frac{1}{x+1}}-2=\lim_{|x|\to+\infty} x\times\left(e^{\frac{1}{x+1}}-1\right)+e^{\frac{1}{x+1}}-2$$

$$=1+1-2=0$$

إذن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x + 2$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C) في جوار $(+\infty)$ و $(-\infty)$.

3) رسم المنحنى :



4) أ - التحقق بأن $g(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x+1)$:

لكل x من المجال $]-1 \ ; \ +\infty[$ ، لدينا :

$$g(x) = \ln f(x) = \ln(x+1)e^{\frac{1}{x+1}}$$

$$= \ln(x+1) + \ln e^{\frac{1}{x+1}} = \frac{1}{x+1} + \ln(x+1)$$

ب- استنتاج تغيرات الدالة g :

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ (لأن $f(x) \to +\infty$ و $\ln f(x) \to +\infty$)

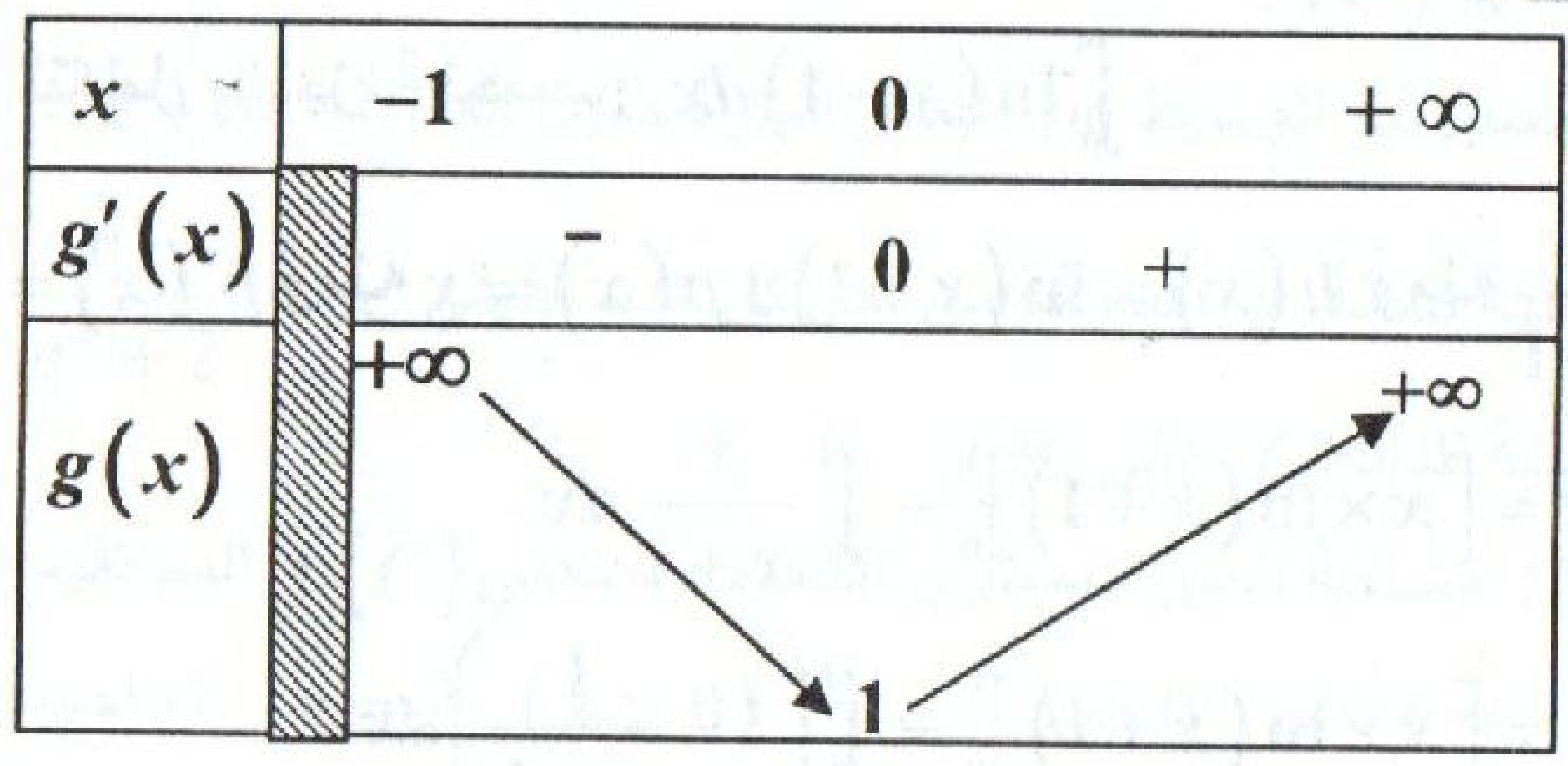
$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} g(x) = +\infty$ (لأن $f(x) \to +\infty$ لما $x \overset{>}{\longrightarrow} -1$)

المشتق : لكل x من المجال $]-1\ ;\ +\infty[$ ، $g'(x)=\left[\ln f(x)\right]'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

على المجال $]-1\ ;\ +\infty[$ لدينا : $f(x)>0$ (انظر جدول تغيرات الدالة f)

ومنه إشارة $g'(x)$ هي إشارة $f'(x)$ على المجال $]-1\ ;\ +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g :



x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

المستقيم $x=-1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C') .

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x(x+1)}+\frac{\ln(x+1)}{x}=0$$

فالمنحنى (C') له في جوار $(+\infty)$ فرع مكافئ في اتجاه (xx') .

ب - إنشاء المنحنى (C') :

5)حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C') و المستقيمات $x=1$ ، $x=0$ ، $y=0$:

$$S=\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx+\int_0^1 \ln(x+1)\,dx$$

$$=\left[\ln(x+1)\right]_0^1+\int_0^1 \ln(x+1)\,dx$$

باستعمال التكامل بالتجزئة نحسب: $\int_0^1 \ln(x+1)\,dx$

بوضع $p'(x)=1$ ومنه $p(x)=x$ و $h(x)=\ln(x+1)$ ومنه $h'(x)=\frac{1}{x+1}$

$$\int_0^1 \ln(x+1)\,dx=\left[x\times\ln(x+1)\right]_0^1-\int_0^1 \frac{x}{x+1}dx$$

$$=\left[x\times\ln(x+1)\right]_0^1-\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\left[x\times\ln(x+1)-x+\ln(x+1)\right]_0^1$$

$$=\left[(x+1)\times\ln(x+1)-x\right]_0^1=(2\ln 2-1)$$

ومنه :

$$S=\left[\ln(x+1)\right]_0^1+(2\ln 2-1)=\ln 2+(2\ln 2-1)=3\ln 2-1(u.a)$$

مسألة 5 :

I) لتكن الدالة g ذات المتغير الحقيقي x و المعرفة بـ:

$g(x)=\alpha x+\beta-\frac{4e^x}{e^x+2}$ حيث : $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$.

- عين α و β لكي يشمل منحني الدالة g النقطة $A(\ln 2;\ln 2)$ و يقبل عند هذه النقطة مماسا يوازي (xx') .

II) نعتبر الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=x+2-\frac{4e^x}{e^x+2}$ ، وليكن (C) منحنيها .

1) أثبت أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=x-2+\frac{8}{e^x+2}$.

2) أ- أدرس تغيرات الدالة f .

ب- أثبت أن المنحني (C) تقبل مستقيمين مقاربين مائلين يطلب تعيين معادلتهما ثم حدد وضعية المنحني (C) بالنسبة لكل منهما.

3) أثبت أن المنحني (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.

4) أ- أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث: $-2 < x_0 < -1$.

ب – أنشئ المنحني (C) .

5) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = x + m$.

6) أ- عين دالة أصلية للدالة g المعرفة من أجل كل عدد حقيقي x بـ: $g(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 2}$

ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

ب – احسب $S(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) و المستقيمات التي معادلاتها $y = x - 2$ ، $x = 0$ ، $(\lambda > 0)$ $x = \lambda$ ثم احسب : $\lim S(\lambda)$ لما $\lambda \to +\infty$.

الحـل

I) تعيين العددين α و β :

$A(\ln 2; \ln 2)$ تنتمي إلى منحني الدالة g يعني $g(\ln 2) = \ln 2$ ومنه

$\alpha \ln 2 + \beta - \dfrac{4e^{\ln 2}}{e^{\ln 2} + 2} = \ln 2$ ومنه $\alpha \ln 2 + \beta - \dfrac{4 \times 2}{2 + 2} = \ln 2$ ومنه

$(*)$ $\alpha \ln 2 + \beta - 2 = \ln 2$.

منحنى الدالة g يقبل مماسا عند النقطة A يوازي (xx') معناه $g'(\ln 2) = 0$

$$g'(x) = \alpha - \frac{4^{x}(e^x + 2) - 4e^{2x}}{(e^x + 2)^2} = \alpha - \frac{8e^x}{(e^x + 2)^2} .$$

$g'(\ln 2) = 0$ ومنه $\alpha - 1 = 0$ ومنه $\alpha = 1$ و بتعويض $\alpha = 1$ في المعادلة(*)

نجد: $\ln 2 + \beta - 2 = \ln 2$ ومنه $\beta = 2$ إذن $\alpha = 1$ و $\beta = 2$.

II) - 1) إثبات أن لكل عدد حقيقي x : $f(x) = x - 2 + \dfrac{8}{e^x + 2}$.

$$f(x)=x+2-\frac{4e^x}{e^x+2}=x\text{-}2\text{+}4\text{-}\frac{4e^x}{e^x+2}$$

$$=x-2+\frac{4\left(e^x+2\right)-4e^x}{e^x+2}=x-2+\frac{8}{e^x+2}$$

2) دراسة تغيرات الدالة f :

مجموعة التعريف : $D_f=]-\infty\ ;+\infty[$

حساب النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x+2-\frac{4e^x}{e^x+2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x-2-\frac{8}{e^x+2}=+\infty$$

حساب المشتق ودراسة إشارته:

لكل x من D_f :

$$f'(x)=\left(x-2+\frac{8}{e^x+2}\right)'=1-\frac{8e^x}{\left(e^x+2\right)^2}=\frac{\left(e^x+2\right)^2-8e^x}{\left(e^x+2\right)^2}$$

$$=\frac{e^{2x}-4e^x+4}{\left(e^x+2\right)^2}=\frac{\left(e^x-2\right)^2}{\left(e^x+2\right)^2}=\left(\frac{e^x-2}{e^x+2}\right)^2\geq 0$$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

3) أ- إثبات أن المنحني (C) يقبل مستقيمين مقاربين:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{4e^x}{e^x+2}=0$ ، إذن المستقيم ذو المعادلة $y=x+2$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C) في جوار $(-\infty)$.

لدينا : $-\dfrac{4e^x}{e^x+2}<0$ ومنه المنحني (C) تحت المستقيم المقارب $y=x+2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8}{e^x+2}=0$ ، إذن المستقيم ذو المعادلة $y=x-2$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C) في جوار $(+\infty)$.

لدينا : $\dfrac{8}{e^x+2}>0$ ومنه المنحني (C) فوق المستقيم المقارب $y=x-2$.

ب- إثبات أن المنحني (C) يقبل نقطة انعطاف :

لكل x من $\mathbb{R}$:

$$f''(x)=\left[\left(\frac{e^x-2}{e^x+2}\right)^2\right]'=2\times\frac{e^x-2}{e^x+2}\times\left(\frac{e^x-2}{e^x+2}\right)'=8e^x\times\frac{e^x-2}{\left(e^x+2\right)^3}$$

$f''(x)=0$ يكافئ $e^x-2=0$ ومنه $e^x=2$ ومنه $x=\ln 2$.

$f''(x)>0$ إذا كان $x>\ln 2$ و $f''(x)<0$ إذا كان $x<\ln 2$

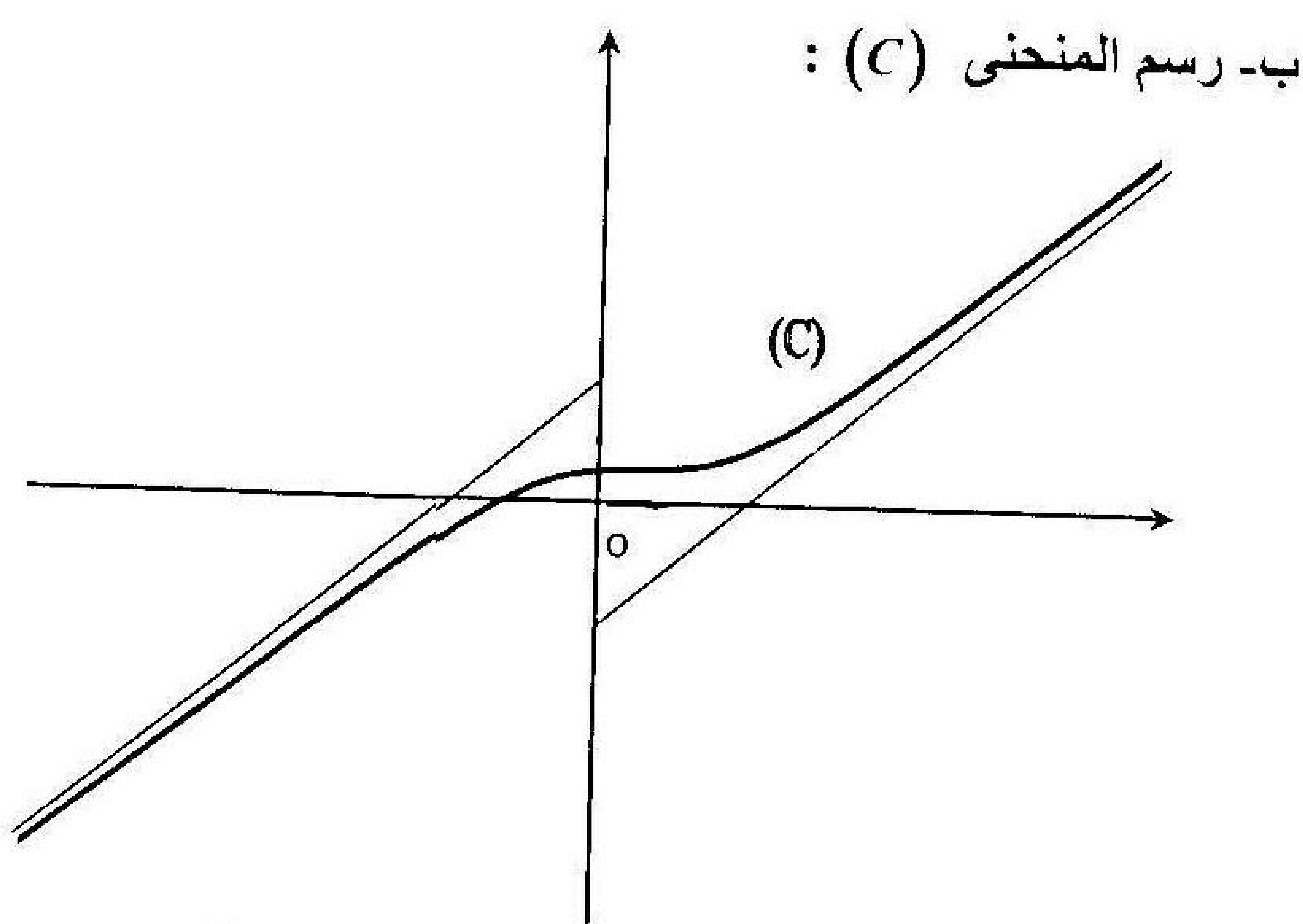
بما أن $f''(x)$ ينعدم من أجل $x=\ln 2$ و مغيرا إشارته فالنقطة $(\ln 2; f(\ln 2))$ أي النقطة $A(\ln 2;\ln 2)$ هي نقطة انعطاف .

4) أ- إثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث $-2<x_0<-1$

$$f(-2)=-\frac{4e^{-\ln 2}}{e^{-\ln 2}+2}=-\frac{4\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+2}=-\frac{4}{5}<0 \text{ ، } f(-1)=\frac{2e-3}{2e+1}>0 \quad .$$

بما أن الدالة f مستمرة و متزايدة على المجال $[-2;-1]$ والعدد 0 محصور بين $f(-1)$ و $f(-2)$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة فالمعدلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $x_0\in\left]-2;-1\right[$

ب- رسم المنحنى (C) :



5) المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط m حلول المعادلة $f(x)=x+m$.

المستقيم (D_m) ذو المعادلة $y=x+m$ يوازي المستقيمين المقاربين للمنحني (C) و يقطع (yy') في النقطة $(0;m)$. من التمثيل البياني (C) و المستقيم (D_m) نلاحظ أن إذا كان $m\in]-\infty;-2[\cup[2;+\infty[$ فإن : $(C)\cap(D_m)=\{\ \}$ و المعادلة $f(x)=x+m$ ليس لها حلول .

إذا كان $m\in]-2;2[$ فإن (C) و (D_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة و المعادلة $f(x)=x+m$ تقبل حلا وحيدا .

6) أ- تعيين دالة أصلية للدالة g حيث : $g(x)=\dfrac{e^x}{e^x+2}$:

$\int\dfrac{e^x}{e^x+2}dx$. نلاحظ أن $(e^x+1)'=e^x$ إذن لدينا الشكل $\int\dfrac{u'}{u}=\ln|u|+c$

$$\int\frac{e^x}{e^x+2}dx=\ln\left(e^x+2\right)+c$$

استنتاج دالة أصلية للدالة f :

$$\int f(x)\,dx=\int\left(x+2-\frac{4e^x}{e^x+2}\right)dx=\frac{x^2}{2}+2x-4\ln\left(e^x+2\right)+c$$

ب- حساب المساحة $S(\lambda)$:

$$S(\lambda)=\int_0^\lambda\left[f(x)-(x-2)\right]dx=\int_0^\lambda\left[\left(x+2-\frac{4e^x}{e^x+2}\right)-(x-2)\right]dx$$

$$=4\int_0^\lambda\left(1-\frac{e^x}{e^x+2}\right)dx=4\left[x-\ln\left(e^x+2\right)\right]_0^\lambda$$

$$=4\left[\lambda-\ln\left(e^\lambda+2\right)+\ln 3\right](u.a)$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}S(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}4\times\left[\lambda-\ln\left(e^\lambda+2\right)+\ln 3\right]$$

$$=\lim_{\lambda\to+\infty}4\left[\ln e^\lambda-\ln\left(e^\lambda+2\right)+\ln 3\right]$$

$$=\lim_{\lambda\to+\infty}4\left(\ln\frac{e^\lambda}{e^\lambda+2}+\ln 3\right)=4\ln 3$$

لأن $\frac{e^\lambda}{e^\lambda+2}\to 1$ و $\ln\frac{e^\lambda}{e^\lambda+2}\to 0$ لما $\lambda\to+\infty$.

مسألة 6 :

I) نعتبر الدالة العددية f ذات المتغير الحقيقي x و المعرفة بـ:

$$f(x)=\frac{2e^{2x}-3e^x}{e^{2x}-3e^x+2}$$

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $e^{2x}-3e^x+2=0$ ثم استنتج مجموعة تعريف الدالة f .

2) أ- احسب $f(\ln 3)$ ، $f(\ln 4)$.

ب- ادرس تغيرات الدالة f ، نرمز بـ (C) لمنحني الدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (طول الوحدة $2cm$)

3) أ- ادرس الفروع اللانهائية للمنحني (C) .

ب- أنشئ المنحني (C) .

4) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة التالية:

$$(2-m)e^{2x}+(3m-3)e^x-2m=0$$

II) لتكن الدالة العددية g ذات المتغير الحقيقي x و المعرفة ب:

$$g(x)=\ln\left(e^{2x}-3e^{x}+2\right)$$

1) باستعمال دراسة الدالة f ، استنتج تغيرات الدالة g .

2) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (γ) للدالة g.

3)أنشئ المنحني (γ) للدالة g .

الحـل

1) حلول المعادلة : $e^{2x}-3e^{x}+2=0$

$e^{2x}-3e^{x}+2=0$ بوضع $e^{x}=z>0$ ، المعادلة تكتب $z^{2}-3z+2=0$

يكافئ ($z_1=2$ أو $z_2=1$) ومنه ($x_1=\ln z_1=\ln 2$ و $x_2=\ln z_2=\ln 1=0$)

ومنه حلول المعادلة $e^{2x}-3e^{x}+2=0$ هي : $x_1=\ln 2$ و $x_2=0$

إذن مجموعة تعريف الدالة f هي: $D=\left]-\infty\ ;\ 0\right[\cup\left]0;\ln 2\right[\cup\left]\ln 2\ ;\ +\infty\right[$

2) أ- حساب $f(\ln 3)$ ، $f(\ln 4)$:

$$f(\ln 3)=\frac{2e^{2\ln 3}-3e^{\ln 3}}{e^{2\ln 3}-3e^{\ln 3}+2}=\frac{2e^{\ln 9}-3\times 3}{e^{\ln 9}-3\times 3+2}=\frac{2\times 9-9}{9-9+2}=\frac{9}{2}$$

$$f(\ln 4)=\frac{2e^{2\ln 4}-3e^{\ln 4}}{e^{2\ln 4}-3e^{\ln 4}+2}=\frac{2\times 16-12}{16-12+2}=\frac{20}{6}=\frac{10}{3}$$

ب- دراسة تغيرات الدالة f :

مجموعة التعريف : $D_f=\left]-\infty;0\right[\cup\left]0;\ln 2\right[\cup\left]\ln 2;+\infty\right[$

حساب النهايات:

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=-\infty$ (لأن $e^{2x}-3e^{x}+2\to 0^{+}$ لما $x\to 0^{-}$) .

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}\ln 2} f(x)=-\infty$ (لأن $e^{2x}-3e^{x}+2\to 0^{-}$ لما $x\xrightarrow{<}\ln 2$)

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\ln 2} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2e^{2x}}{e^{2x}}\right)=2$

حساب المشتق ودراسة إشارته:

لكل x من D_f :

$$f'(x)=\frac{\left(4e^{2x}-3e^{x}\right)\left(e^{2x}-3e^{x}+2\right)-\left(2e^{2x}-3e^{x}\right)\left(2e^{2x}-3e^{x}\right)}{\left(e^{2x}-3e^{x}+2\right)^{2}}$$

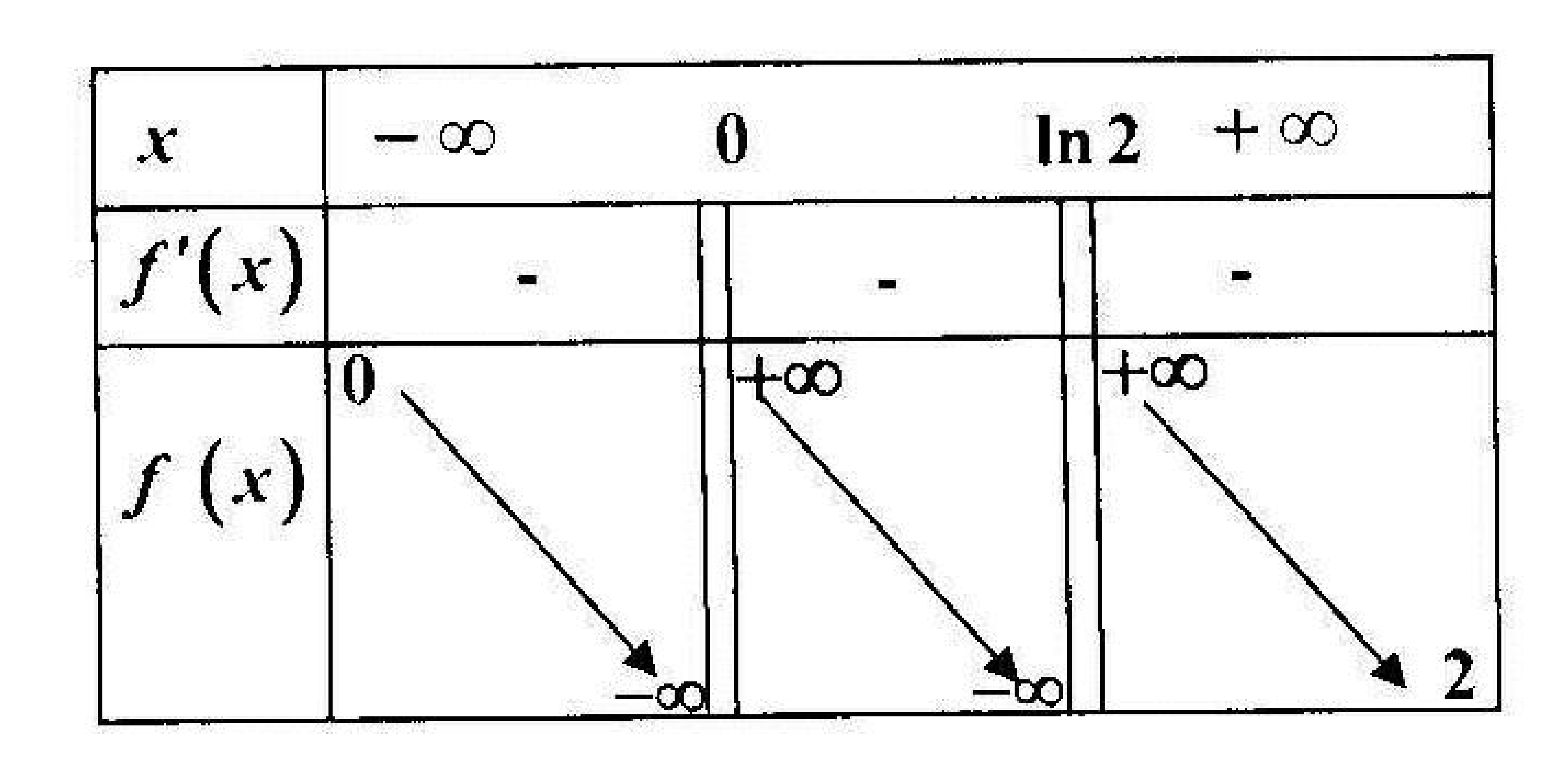
$$=\frac{e^{x}\left(-3e^{2x}+8e^{x}-6\right)}{\left(e^{2x}-3e^{x}+2\right)^{2}}$$

لكل x من D_f : $\frac{e^{x}}{\left(e^{2x}-3e^{x}+2\right)^{2}}>0$ و إشارة $f'(x)$ هي إشارة العبارة$\left(-3e^{2x}+8e^{x}-6\right)$.

بوضع $e^{x}=z$ فإن $-3e^{2x}+8e^{x}-6=-3z^{2}+8z-6$ ومميزها : $\Delta'=16-18=-2<0$. إذن من أجل كل z من $\mathbb{R}$: $-3z^{2}+8z-6<0$

إذن $-3e^{2x}+8e^{x}-6<0$ لكل x من D_f .

جدول التغيرات:



x	$-\infty$ 0 $\ln 2$ $+\infty$		
$f'(x)$	-	-	-
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 2$

3)أ- دراسة الفروع اللانهائية للمنحني (C) :

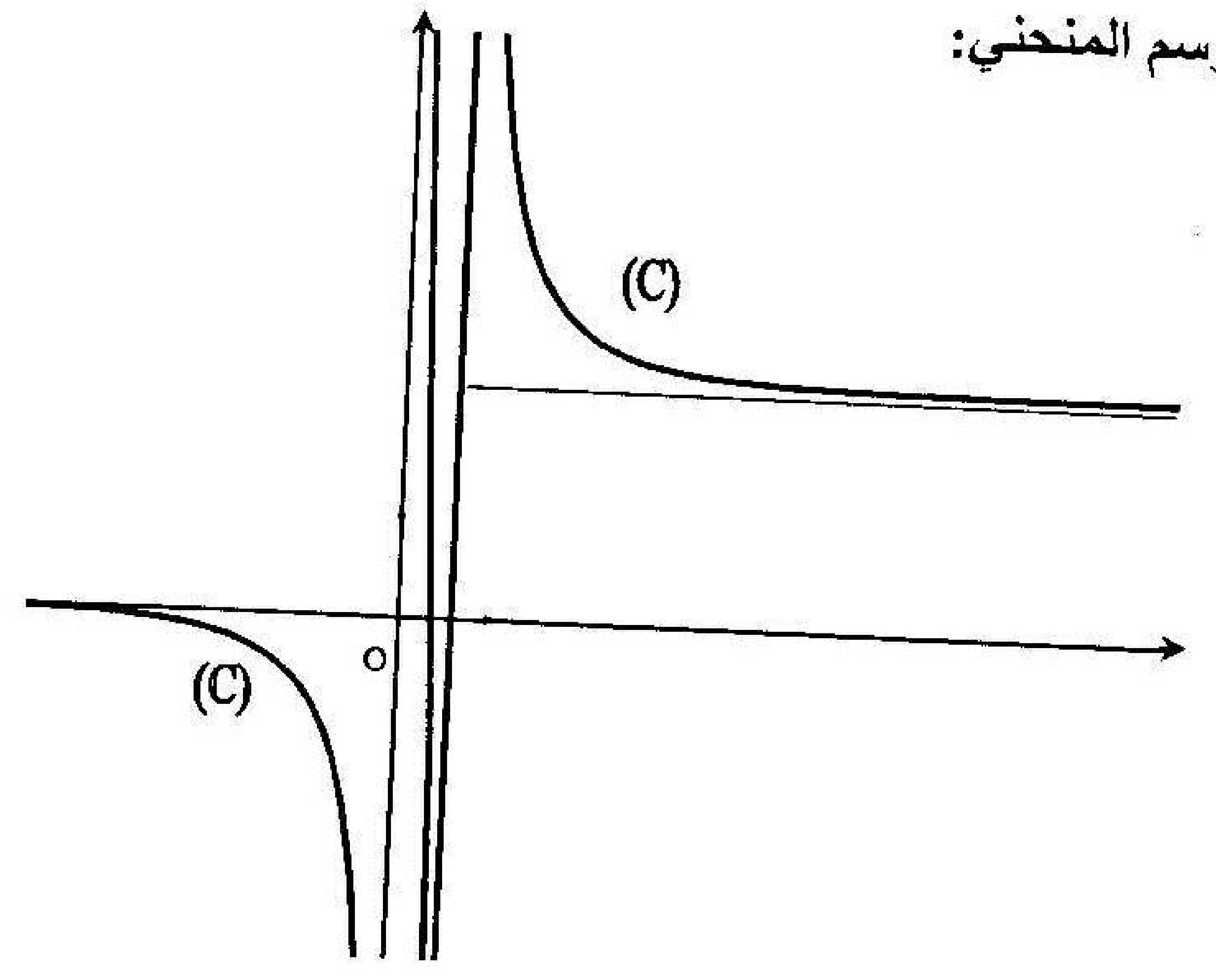
المستقيمان $x=0$ و $x=\ln 2$ هما مستقيمان مقاربان للمنحني (C).

المستقيم ذو المعادلة $y=0$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C) في جوار $(-\infty)$

المستقيم ذو المعادلة $y=2$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C) في جوار $(+\infty)$



ب- رسم المنحني:



4) المناقشة بيانيا للمعادلة $(2-m)e^{2x}+(3m-3)e^{x}-2m=0$

تكافئ $(2-m)e^{2x}+(3m-3)e^{x}-2m=0$

ومنه : $m\left(-e^{2x}+3e^{x}-2\right)+2e^{2x}-3e^{x}=0$

ومنه: $\dfrac{2e^{2x}-3e^{x}}{e^{2x}-3e^{x}+2}=m$ ومنه $2e^{2x}-3e^{x}=m\left(e^{2x}-3e^{x}+2\right)$

. $f(x)=m$

عدد حلول المعادلة المعطاة هو عدد نقاط تقاطع المنحني (C) مع المستقيم (D_m) ذو المعادلة $y=m$ و هو يوازي (xx') .

إذا كان $m\in\left]-\infty;0\right[$ فإن (C) يقطع المستقيم (D_m) في نقطتان ، فالمعادلة $f(x)=m$ تقبل حلين .

إذا كان $m\in\left]0;2\right[$ فإن (C) يقطع المستقيم (D_m) في نقطة واحدة ، فالمعادلة $f(x)=m$ تقبل حلا وحيدا .

إذا كان $m\in\left]2;+\infty\right[$ فإن (C) يقطع المستقيم (D_m) في نقطتان ، فالمعادلة $f(x)=m$ تقبل حلين .

II) 1) دراسة تغيرات الدالة g :

لدينا $g(x)=\ln\left(e^{2x}-3e^{x}+2\right)$ ، تكون الدالة g معرفة إذا كان $e^{2x}-3e^{x}+2>0$ ومنه $x\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]\ln 2;+\infty\right[$

<u>حساب النهايات :</u>

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\ln 2$ ، $\lim_{x\to 0} g(x)=-\infty$

$\lim_{x\to\ln 2} g(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

(لأن $e^{2x}-3e^{x}+2\to+\infty$ لما $x\to+\infty$)

<u>حساب المشتق $g'(x)$ و دراسة إشارته:</u>

لكل x من D : $g'(x)=\dfrac{2e^{2x}-3e^{x}}{e^{2x}-3e^{x}+2}=f(x)$

من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أن:

$g(x)<0$ من أجل كل $x\in\left]-\infty;0\right[$ ، $g(x)>0$ من أجل كل $x\in\left]\ln 2;+\infty\right[$

<u>جدول تغيرات الدالة g :</u>

x	$-\infty$ 0		$\ln 2$ $+\infty$
$g'(x)$	-	//////	+
$g(x)$	$\ln 2$ ↘ $-\infty$	//////	$-\infty$ ↗ $+\infty$

2) <u>دراسة الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة g</u> :

المستقيم ذو المعادلة $x=0$ هو مستقيم مقارب للمنحني (γ) .

المستقيم ذو المعادلة $x=\ln 2$ هو مستقيم مقارب للمنحني (γ) .

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{2x}-3e^{x}+2\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln e^{2x}\left(1-3e^{-x}+2e^{-2x}\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln e^{2x}+\ln\left(1-3e^{-x}+2e^{-2x}\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}+\frac{\ln\left(1-3e^{-x}+2e^{-2x}\right)}{x}=2$$

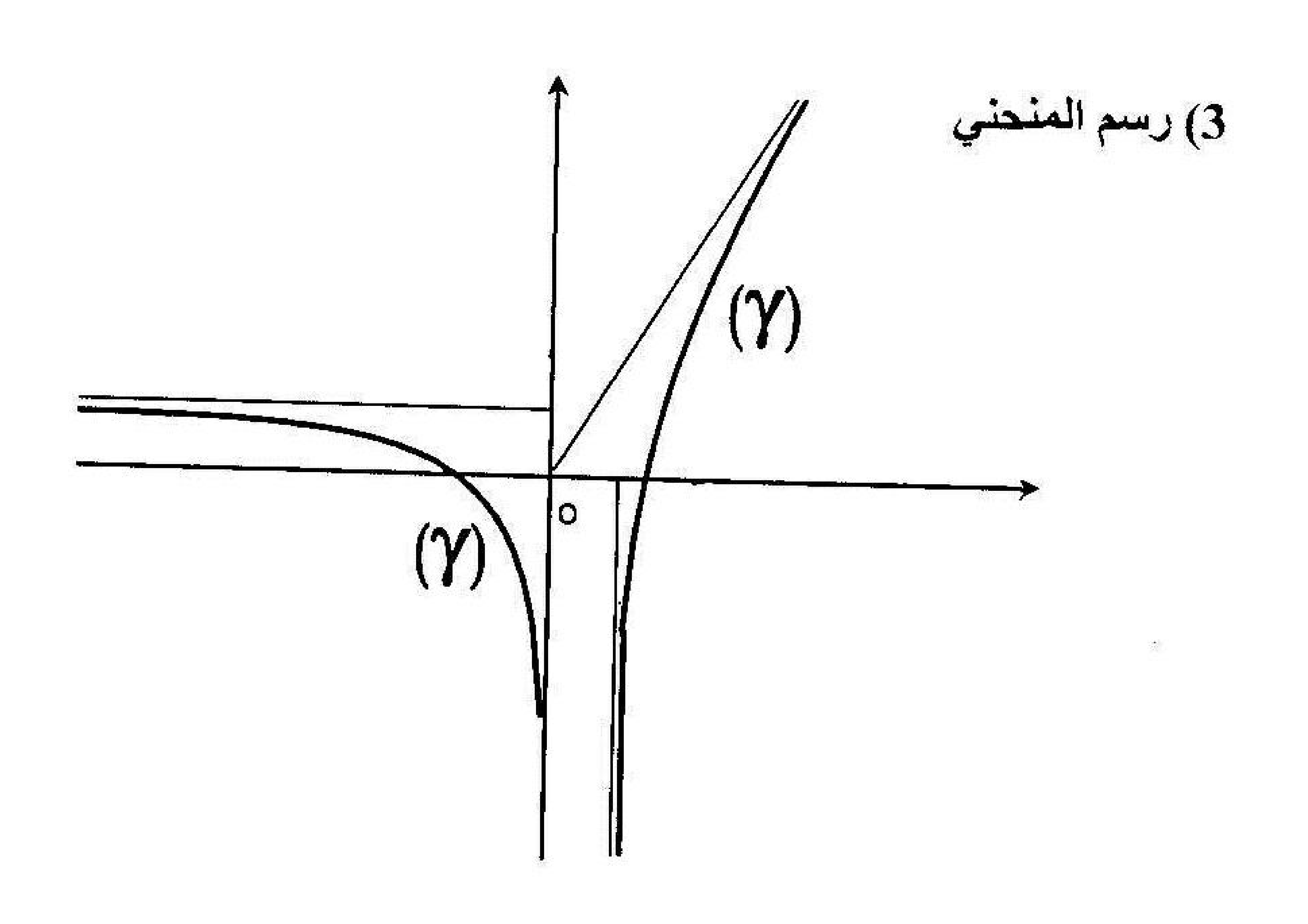
$$\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-2x\right]=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(e^{2x}-3e^{x}+2\right)-2x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(e^{2x}-3e^{x}+2\right)-\ln e^{2x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{e^{2x}-3e^{x}+2}{e^{2x}}=\ln 1=0$$

إذن في جوار $(+\infty)$ المنحني (γ) يقبل مستقيما مقاربا ذو المعادلة $y=2x$.

3) رسم المنحني



دوال أسية مقترحة للدراسة

ادرس دراسة كاملة (تغيرات ، الفروع اللانهائية ، رسم المنحني) لكل من الدوال ألآتي :

$1)f(x)=e^{-\frac{x}{2}}+x-1$, $2)f(x)=x+(x-1)e^{x}$, $3)f(x)=e^{x}+1-xe^{x}$

$4)f(x)=\left|e^{2x}-e^{x}\right|-2$, $5)f(x)=(2x+1)e^{-x}-x(x-1)$

$6)f(x)=x-1-\dfrac{2}{e^{x}-1}$, $7)f(x)=(x^{2}+3x+4)e^{-\frac{1}{2}x}$

$8)f(x)=\dfrac{e^{2x}+e^{x}-1}{e^{x}-1}$, $9)f(x)=(x-1)e^{|x-1|}$

$10)f(x)=x^{2}+x-e^{x^{2}+x-12}$, $11)f(x)=e^{|x^{2}-2x|}$

$12)f(x)=\dfrac{e^{x}-3}{e^{2x}-8}$, $13)f(x)=1-\dfrac{1}{2}e^{-2x}-e^{x}$

$14)f(x)=(x^{2}+x-5)e^{-x}$, $16)f(x)=xe^{|x+1|}$

$17)f(x)=\dfrac{1}{2}x+e^{-\frac{1}{2}x+3}$, $18)f(x)=e^{2x}-9e^{x}+4x+1$

$19)f(x)=\sqrt{e^{x}-e^{2x}}$, $20)f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}e^{x}$

$21)f(x)=(x+12)e^{\frac{1}{x}}$, $22)f(x)=\dfrac{3e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$

مسائـل أسية مقترحة للحل

مسالة 1

I. f دالة عددية للمتغير الحقيقي x حيث : $f(x)=2x-1+e^{-x}+2e^{\frac{x}{2}}$

(c) هو الممثل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس.

1- أ) أدرس تغيرات الدالة f. ب) استنتج أن : $\forall x\in\mathbb{R}: f(x)\geq 2$.

2- أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$

ب) برهن أن المستقيم ذو المعادلة $y=2x-1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c) في جوار $(+\infty)$. جـ) أنشئ المنحني (c).

3)أحسب المساحة المحصورة بين المنحني (c) والمستقيمات التي معادلاتها :

$x=0\ ,\ x=2\ln 2\ ,\ y=2x-1$

II. لتكن الدالة g المعرفة بـ : $g(x)=x^2-x-e^{-x}-4e^{-\frac{x}{2}}$.

1- ا) تحقق أن : $\forall x\in\mathbb{R}:\ g(x)=e^{-x}\left(x^2e^x-xe^x-4e^{\frac{x}{2}}-1\right)$.

ب) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$. جـ)أدرس تغيرات الدالة g (يمكنك استعمال نتائج السؤال 1

2- أ)برهن بأن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد $x_0\in]1;2[$.

ب) برهن بأن المنحني (Γ) للدالة g يقبل في جوار $(+\infty)$ منحني مقارب يطلب تعيينه

3) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (Γ).

4) أنشئ في معلم جديد متعامد ومتجانس المنحني (Γ)

مسألة 2

لتكن الدالة f ذات المتغير الحقيقي x المعرفة بـ : $f(x)=(2x^2-7x+5)e^x$.

ليكن (c) الممثل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس .

1) برهن أن $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^x=0$ (يمكنك وضع $x=2u$)

2) أدرس تغيرات الدالة f . 3- ا) عين نقاط التقاطع للمنحني (c) مع محور الفواصل

ب) عين معادلة المماس للمنحني (c) عند النقطة ذات الفاصلة 0

جـ) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c). 4) أنشئ المنحني (c)

5- ا) عين دالة أصلية للدالة f من الشكل : $x \to (ax^2+bx+c)e^x$ حيث a,b,c

اعداد حقيقية يطلب تعيينها . ب) أحسب المساحة $S(\lambda)$ المحددة بالمنحني (c)

والمستقيمات التي معادلاتها : $y=0$, $x=1$, $x=\lambda$ حيث : $\lambda \le 1$

جـ) أحسب : $S(-4)$. د) أحسب : $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} S(\lambda)$

مسألة 3

f دالة عددية ذات المتغير الحقيقي x معرفة بـ : $f(x)=-x+1+e^{2x}-e^x$.

(c) ممثلها البياني في معلم متعامد ومتجانس (طول الوحدة $2cm$) .

1) ادرس تغيرات الدالة f . 2- أ) برهن أن المنحني (c) يقبل مستقيم مقارب (D)

يطلب إعطاء معادلته . ب) أدرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى (D).

3) نعتبر المماس (Δ) للمنحني (c) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 .

عين x_0 حتى يكون (Δ) يوازي (D) ثم أكتب معادلة (Δ) في هذه الحالة .

4- أ) بين أن المنحني (c) يقبل نقطة انعطاف . ب) أرسم (c) و (Δ) في نفس المعلم

5) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m عدد نقاط تقاطع (c) مع المستقيم (D_m) ذو

المعادلة : $y=-x+m$.

6) n عدد طبيعي . أ) أحسب المساحة $S(n)$ المحددة بالمنحني (c) والمستقيمات

التي معادلاتها : $y=-x+1$, $x=\ln(n+1)$, $x=\ln(n)$

ب) نضع : $\alpha_n = S(1)+S(2)+.....+S(n)$. أحسب α_n بدلالة n.

مسألة 4

لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x)=x-\dfrac{1}{x}-\dfrac{e^x}{e^x-1}$ وليكن (c) المنحني البياني لها

في معلم متعامد ومتجانس . 1) أدرس تغيرات الدالة f .

2- ا) برهن أن المنحني (c) يقطع (xx') في النقطة ذات الفاصلة x_0 حيث $x_0 \in]1;2[$

ب) أحسب $f(-x)+f(x)$ ثم استنتج خاصية مميزة للمنحني (c).

3- أ) برهن أن : $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=-1$. ب) استنتج معادلة المستقيم المقارب المائل للمنحني (c) في جوار $(+\infty)$. جـ)برهن أن امستقيم ذو المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب للمنحني (c) في جوار $(-\infty)$. 4) أنشئ المنحني (c).

5) أحسب المساحة $S(\lambda)$ المحددة بالمنحني (c) والمستقيمات التي معادلاتها : $y=0$, $x=\lambda$, $x=1$ حيث $\lambda\in\left]0;1\right[$. ب) أحسب $\lim_{\lambda\to 0^+}S(\lambda)$

مسألة 5

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=(x-1)e^{x}+1$.

1- أ) أدرس تغيرات الدالة g. ب) أحسب $g(0)$.

جـ) استنتج أن $\forall x\in\mathbb{R}:\ g(x)\geq 0$.

2) لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x)=(2x-3)e^{2x}+4e^{x}-1$ وليكن (c) الممثل البياني لها في معلم متعامد ومتجانس . أ) أحسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)$

ب) بين أن $\forall x\in\mathbb{R}:\ f'(x)=4e^{x}\times g(x)$. جـ) أعطي جدول تغيرات الدالة

3) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c). 4) أرسم المنحني (c)

5) تحقق بأن الدالة h المعرفة بـ : $h(x)=(x-2)e^{2x}+4e^{x}$ هي دالة أصلية للدالة $x\to(2x-3)e^{2x}+4e^{x}$. ب) أحسب المساحة المحصورة بين المنحني (c) والمستقيمات التي معادلاتها : $y=-1$, $x=-\ln 2$, $x=0$

مسألة 6

لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x)=e^{x}-2e^{\frac{x}{2}}$ وليكن (c) تمثيلها البياني. في معلم متعامد ومتجانس .

1) أحسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ (لاحظ أن : $f(x)=e^{x}\left(1-2e^{\frac{-x}{2}}\right)$)

2) أدرس تغيرات الدالة f. 3)بين أن المنحني (c) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها

4- أ) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c). ب) عين نقاط تقاطع (c) مع (xx')

جـ) أرسم المنحني (c). 5) أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المحصورة بين المنحني (c) ومحوري الفواصل والترتيب والمستقيم ذو المعادلة $x=2\ln 2$.

6) نعتبر المعادلة التفاضلية : $y-2y'=-e^{x} \dots (*)$. أ) تحقق أن الدالة f هي حل للمعادلة $(*)$. نضع $y=g+f$ حيث g دالة عددية للمتغير الحقيقي x.

ب) بين أن $g'-2g=0$ ثم حل هذه المعادلة واستنتج حلول المعادلة $(*)$

مسالة 7

لتكن f الدالة العددية المعرفة بـ : $f(x)=x^2-3+3e^{-x}$ وليكن (c) المنحني البياني لها في معلم متعامد و متجانس $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ (طول الوحدة $2cm$) .

1- أ) أحسب $f'(x)$. ب) ادرس تغيرات الدالة $(x)'f$ واستنتج أن المعادلة $f'(x)=0$ تقبل حل وحيد $\alpha\in\left]0,4\ ;\ 0,5\right[$.

ج) ادرس إشارة $f'(x)$ على المجال $\left[0;+\infty\right[$.

2) ادرس تغيرات الدالة f على المجال $\left[0;+\infty\right[$.

3. أ) برهن أن المنحني (c) يقبل منحني مقارب (Γ) يطلب تعيينه .

ب) أدرس وضعية (c) بالنسبة إلى (Γ). جـ) بين أن : $f(\alpha)=\alpha^2+2\alpha-3$

4) انشئ المنحني (c).

5- أ) أحسب : $S(\lambda)=\int_0^{\lambda} f(x)-\left(x^2-3\right)dx$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}^{+*}$.

ب) فسر هندسيا النتيجة . جـ) أحسب $\lim_{\lambda\to+\infty} S(\lambda)$

مسالة 8

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بـ : $f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{2x}-4(x-1)e^{x}-2$.

نرمز بـ (c) لمنحني الدالة f في مستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس .

1 أ) اثبت أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل :

$f(x)=xe^{2x}\left[1-\frac{1}{2x}-\frac{4}{e^{x}}+\frac{4}{xe^{x}}-\frac{2}{xe^{2x}}\right]$. ب) أدرس تغيرات الدالة f

2 أ) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c) .

ب) اثبت أن المنحني (c) يقطع (xx') في نقطة وحيدة $x_0\in\left]-2,-1\right[$

جـ) أنشئ المنحني (c).   3)ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m عدد جذور

المعادلة :: $x\left(e^{x}-4\right)=(m+2)e^{-x}+\frac{e^{x}}{2}-4$.

4- أ) ليكن $\lambda \in \mathbb{R}^{-*}$ ، باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب :

$$\int_{\lambda}^{0}\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{2x}dx \quad , \quad \int_{\lambda}^{0}(x-1)e^{x}dx .$$

ب) استنتج حساب المساحة $S(\lambda)$ المحصورة بين المنحني (c) والمستقيمات التي معادلاتها : $y=-2$ ، $x=\lambda$ ، $x=0$.   جـ) أحسب $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} S(\lambda)$

مسألة 9

I. g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x حيث : $g(x)=(3-2x)e^{x}+2$.

1) أدرس تغيرات الدالة g.

2)بين أن المعادلة : $g(x)=0$ تقبل حل وحيدا α حيث : $\alpha \in]1,68\ ;\ 1,69[$

3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x

4) باستعمال التكامل بالتجزئة أوجد على $\mathbb{R}$ دالة أصلية للدالة : $x \to (3-2x)e^{x}$

λ عدد حقيقي أكبر تماما من 1 ، أوجد λ بحيث يكون : $\int_{0}^{\lambda} g(x)dx=\lambda-1$

II. f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x حيث : $f(x)=\frac{e^{x}+4x-1}{e^{x}+1}$

(Γ) هو الممثل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس .

1) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x)=\frac{2g(x)}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$

2)بين أن : $f(\alpha)=4\alpha-5$.   3) أدرس تغيرات الدالة f

4- أ) بين أن (Γ) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل نرمز له بالرمز (Δ).

ب) أدرس وضعية (Γ) بالنسبة إلى (Δ).

5- ا) أكتب معادلة المماس (D) للمنحني (C) في النقطة التي فاصلتها $x=0$

ب) أرسم المنحني (Γ).

) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x :

$$me^{x}-4x+m+2=0$$

مسألة 10

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x والمعرفة بـ : $f\left(x\right)=3x+1+\dfrac{e^{-x}-1}{2-e^{-x}}$

(c) هو التمثيل البياني للدالة f . 1) عين مجموعة تعريف الدالة f .

) عين الأعداد الحقيقية a,b,c حيث :

$\forall x\in D_f:f\left(x\right)=3x+\dfrac{a}{2-e}$ و $\forall x\in D_f:f\left(x\right)=3x+b+\dfrac{ce^{-x}}{2-e^{-x}}$

) ادرس تغيرات الدالة f . 4) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c)

) حدد وضعية المنحني بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=3x+\dfrac{1}{2}$.

) أنشئ (c), (Δ) . 7) نقش حسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة :

$m-1=\dfrac{e}{2-e}$. 8) أحسب $s\left(\alpha\right)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (c)

والمستقيمات التي معادلاتها : $y=3x+1/2$, $x=\alpha$, $x=0$ حيث : $\alpha\in\mathbb{R}^{+*}$

الــدوال اللــوغاريتـمية

• الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

تعريف :
نسمي الدالة اللوغاريتمية النيبيرية الدالة التي نرمز لها بالرمز **ln** والتي ترفق بكل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ العدد $\ln x$.

الخواص الأساسية

$\ln e = 1$, $\ln 1 = 0$. من أجل كل عددين حقيقيين x, y من المجال $]0;+\infty[$:

$\ln x = \ln y$ يعني $x = y$ ، $\ln x > \ln y$ يعني $x > y$

$$\ln x^n = n\ln x \quad , \quad \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y \quad , \quad \ln xy = \ln x + \ln y$$

دراسة الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

__الاستمرار والاشتقاق :__

الدالة $x \to \ln x$ مستمرة وقابلة الاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$

من أجل كل $x \in]0;+\infty[$ فإن : $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ، وبصفة عامة إذا كانت الدالة u موجبة تماما وقابلة الاشتقاق على المجال D فإن من أجل كل $x \in D$:

$$[\ln u(x)]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

__النهيا ت:__

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad , \quad \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \quad , \quad \lim_{x \to 0^+} x \times \ln x = 0^-$$

$$\lim_{u(x) \to +\infty} \frac{\ln u(x)}{u(x)} = 0 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} u(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to 0^+} u(x) = -\infty$$

$$\lim_{u(x)\to 0^+} u(x)\times \ln u(x)=0\ ,\quad \lim_{u(x)\to 1}\frac{\ln u(x)}{u(x)-1}\quad ,\quad \lim_{u(x)\to 0}\frac{\ln\left(1+u(x)\right)}{u(x)}=1$$

تغيرات الدالة $x \to \ln x$

نعلم أن من أجل كل $x \in]0;+\infty[$ فإن : $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x} > 0$ ، على المجال

$]0;+\infty[$ مشتق الدالة $x \to \ln x$ موجب تماما ومنه الدالة $x \to \ln x$ متزايدة تماما

الدالة اللوغاريتم العشري

تعريف : نسمي الدالة اللوغاريتم العشري الدالة التي نرمز لها بالرمز" $\log$ "والمعرفة

على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

ملاحظة : $\log 10 = 1\quad ,\quad \log 1 = 0$

أمثلة على دراسة الدوال اللوغاريتمية

لندرس دراسة كاملة (تغيرات، الفروع اللانهائية، رسم المنحني) لكل من الدوال الآتية :

1) $f(x)=\ln\left|x^2-x-2\right|$

2) $f(x)=\ln(1-\ln x)$

3) $f(x)=1-x+\ln(x+1)^2$

4) $f(x)=\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)$

5) $f(x)=x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$

6) $f(x)=-\frac{1}{2x+1}+\ln\frac{x+1}{x}$

7) $f(x)=\frac{x}{3}+\ln x-\ln(x-4)$

8) $f(x)=\frac{1}{x(1-\ln x)}$

9) $f(x)=\left(x-2\right)+\left(x-1\right)\ln\frac{1}{|x-1|}$

10) $f(x)=\frac{\ln x}{x(\ln x-1)}$

11) $f(x)=x(-1+\ln x)+\frac{1+\ln x}{x}$

12) $f(x)=\left(x-1\right)\ln\frac{x}{x-1}+\ln x$

الحـــل

$f(x)=\ln\left|x^2-x-2\right|$ (1

<u>مجموعة التعريف</u> :

$$D_f=]-\infty,\ -1[\cup]-1,\ 2[\cup]2,\ +\infty[$$

<u>حساب النهايات</u> :

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{|x|\to +\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-\infty$

<u>حساب المشتق</u> : من أجل كل $x\in D_f$:

$$f'(x)=\frac{2x-1}{x^2-x-2}$$

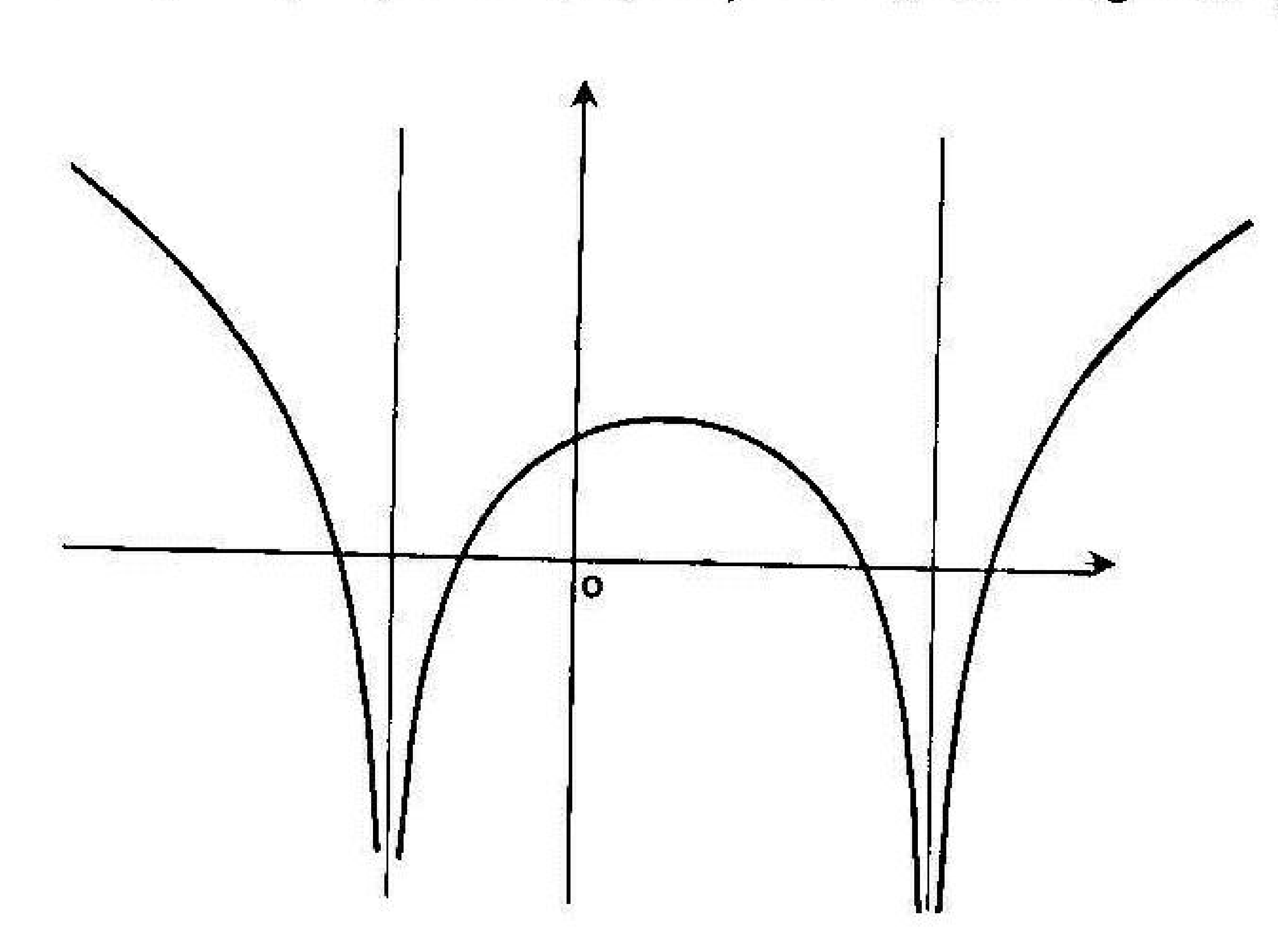
<u>جدول التغيرات</u> :

x	$-\infty$		-1		$1/2$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\ln 9/4$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

<u>الفروع اللانهائية</u> :

- المستقيمان اللذان معادلتهما $x=-1$ و $x=2$ مستقيمان مقاربان للمنحني.
- المنحني له فرع من قطع مكافئ في اتجاه (xx') في جوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$

المنحني



$f(x)=\ln(1-\ln x)$ (2

<u>مجموعة التعريف</u> : $D_f =]0,\ e[$

<u>حساب النهايات</u> :

$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = +\infty$ $\quad\quad$ $\lim_{x \xrightarrow{<} e} f(x) = -\infty$

<u>حساب المشتق</u> : من أجل كل $x \in D_f$:

$$f'(x) = -\frac{1}{x(1-\ln x)}$$

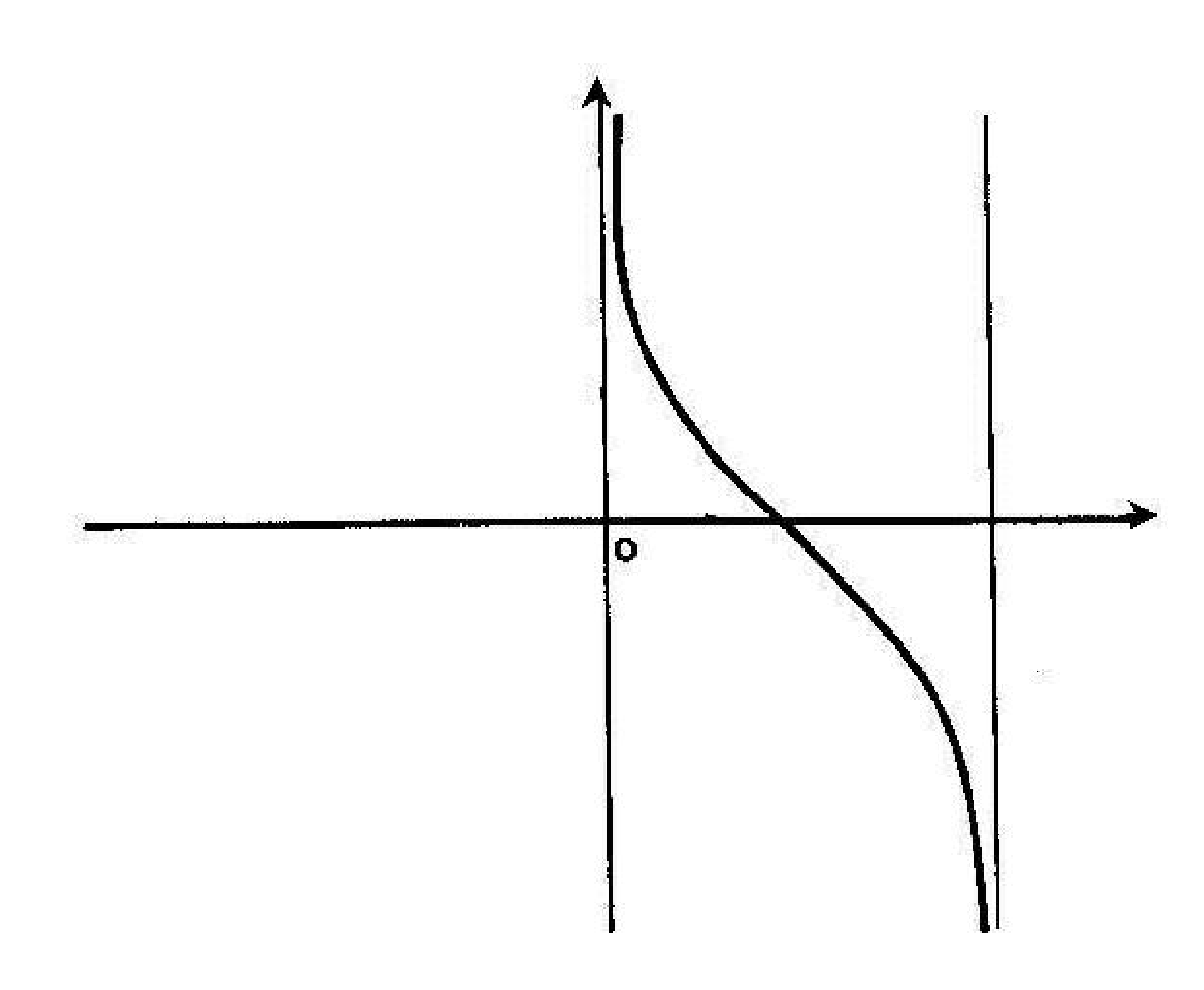
<u>جدول التغيرات</u> :

x	0		e
$f'(x)$	‖	$-$	‖
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖

الفروع اللانهائية :

- المستقيمان اللذان معادلتهما $x=0$ و $x=e$ هما مستقيمان مقاربان للمنحني

المنحني :



$$f(x) = 1 - x + \ln(x+1)^2 \qquad (3$$

<u>مجموعة التعريف</u> : $D_f =]-\infty, \ -1[\cup]-1, \ +\infty[$

<u>حساب النهايات</u> :

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $\qquad \lim_{x \to -1} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

<u>حساب المشتق</u> : من أجل كل $x \in D_f$: $f'(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

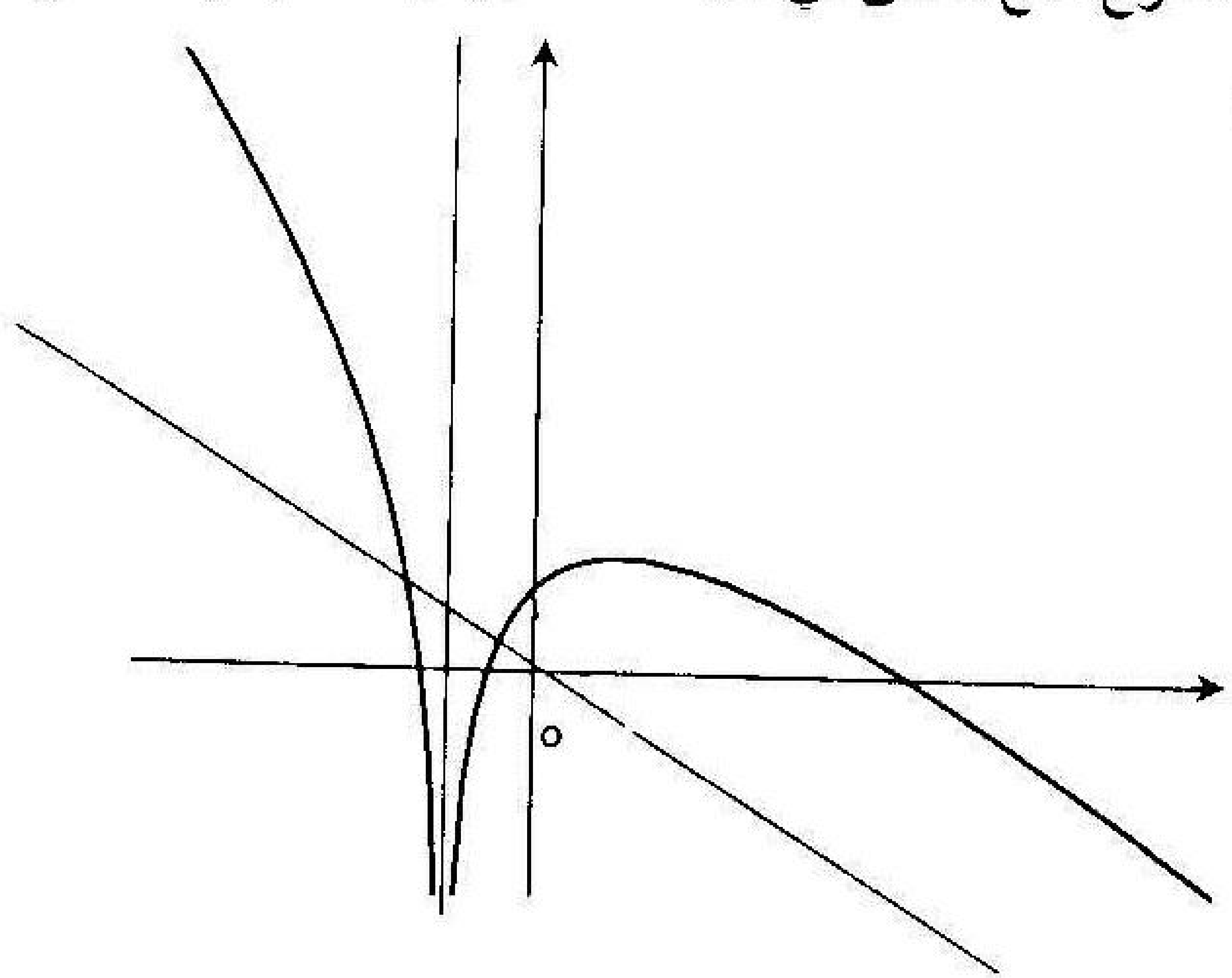
<u>جدول التغيرات</u> :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ || $-\infty$	↗	$2\ln 2$	↘	$-\infty$

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ هو مستقيم مقارب للمنحني.
- المنحني له فرع قطع مكافئ في اتجاه المستقيم $y = -x$ في جوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$

المنحني :



$$f(x)=\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1) \quad (4$$

<u>مجموعة التعريف</u> :

$$D_f=\left]-1,\ +\infty\right[$$

<u>حساب النهايات</u> :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)=-\infty$$

<u>حساب المشتق</u> : من أجل كل $x \in D_f$:

$$f'(x)=\frac{x^2}{x+1}$$

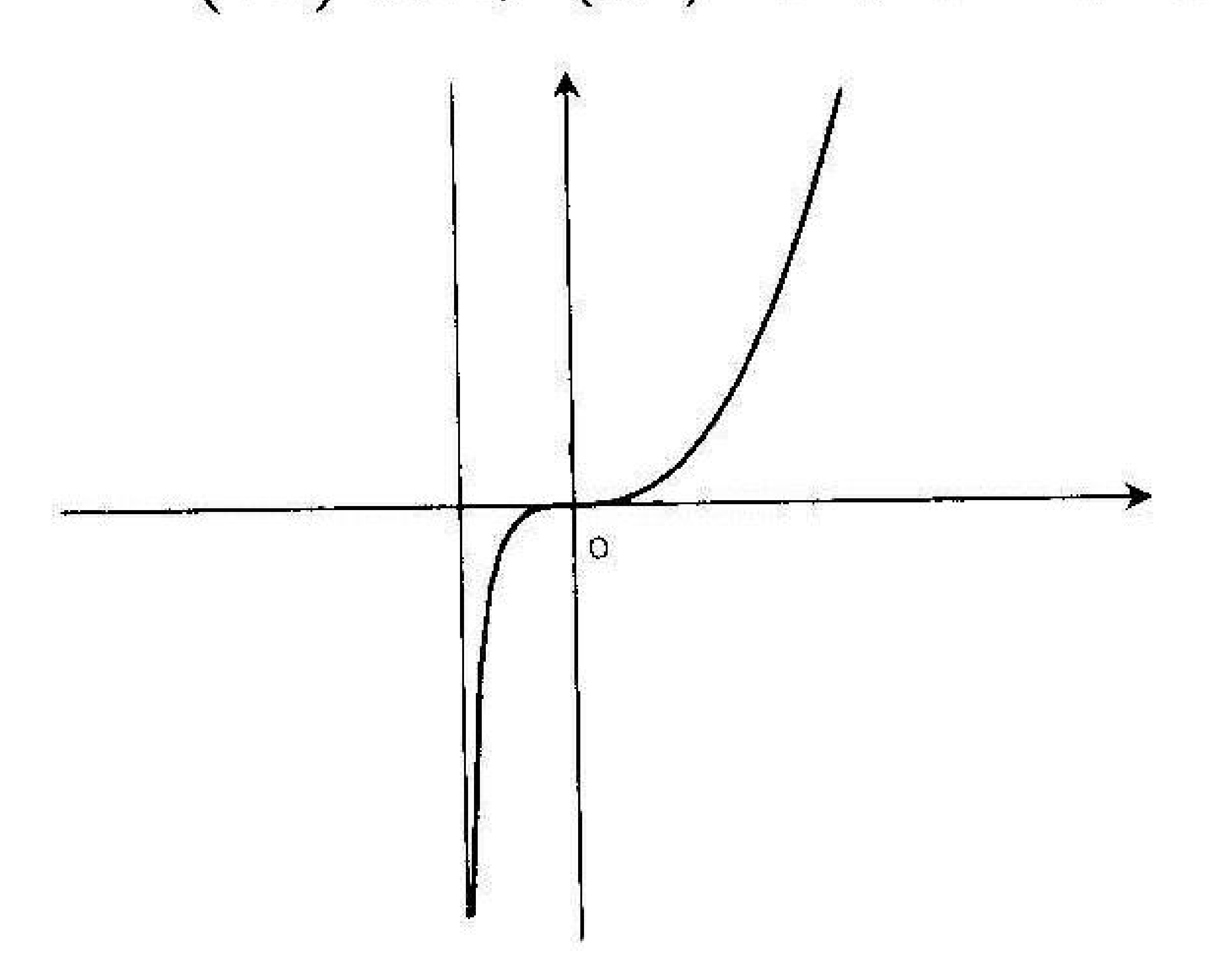
<u>جدول التغيرات</u> :

x	-1 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	‖ $\qquad$ +
$f(x)$	‖ $-\infty$ ↗ $+\infty$

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ هو مستقيم مقارب للمنحني.
- المنحني له فرع قطع مكافئ في اتجاه (yy') في جوار $(+\infty)$

المنحني :



5) $f(x) = x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$

مجموعة التعريف : $D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$

حساب النهايات :

$\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$: $f'(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

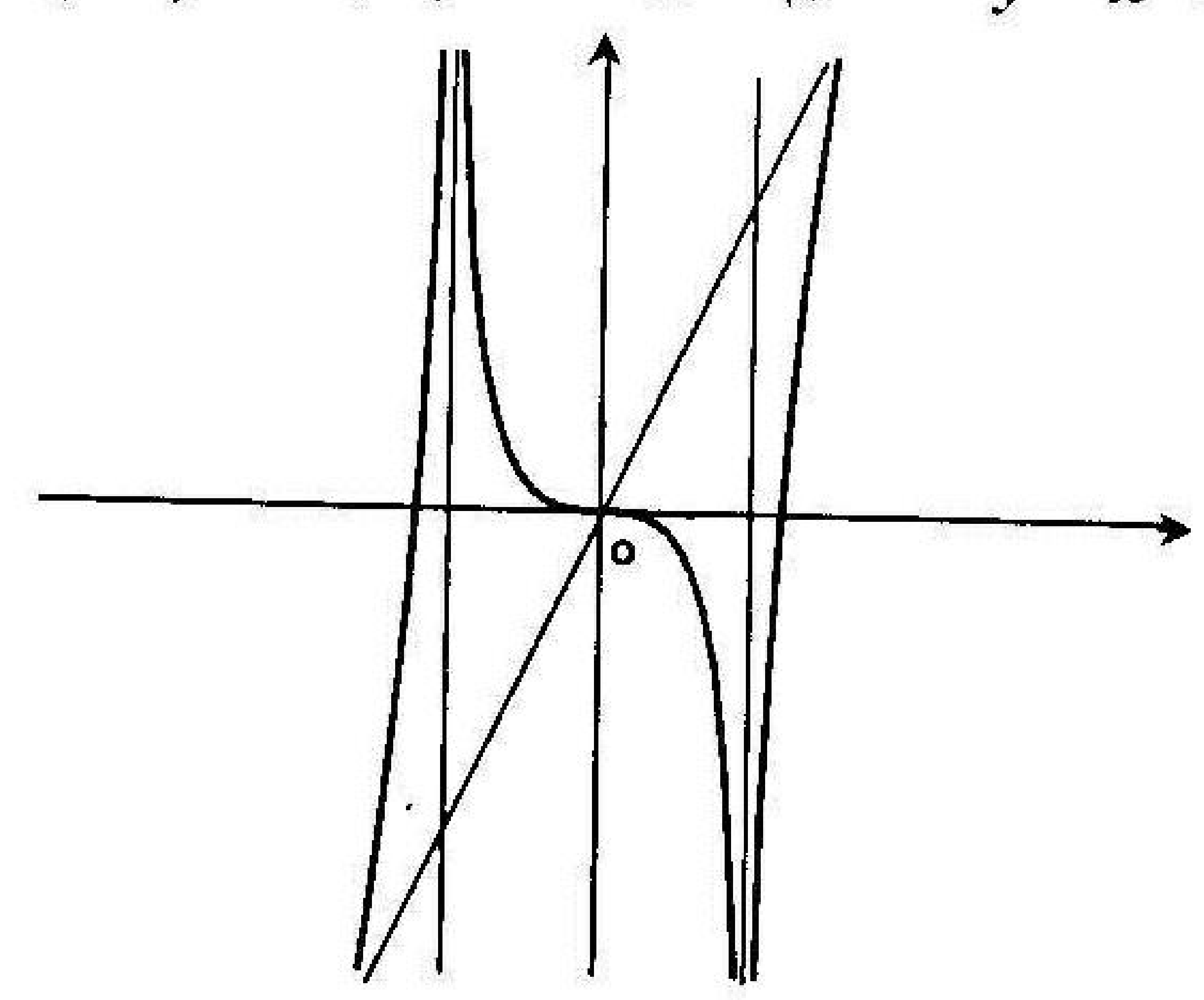
جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	$+\infty \searrow -\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$	

الفروع اللانهائية :

- المستقيمان اللذان معادلتهما $x = -1$ و $x = 1$ مستقيمان مقاربان للمنحني
- المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$

المنحني :



$$f(x) = -\frac{1}{2x+1} + \ln\frac{x+1}{x} \quad (6$$

<u>مجموعة التعريف</u> :

$$D_f =]-\infty, \ -1[\cup]0, \ +\infty[$$

<u>حساب النهايات</u> :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = +\infty \qquad \lim_{|x| \to +\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \xrightarrow{<} -1} f(x) = -\infty$$

<u>حساب المشتق</u> : من أجل كل $x \in D_f$:

$$f'(x) = -\frac{2x^2+2x+1}{x(x+1)(2x+1)^2}$$

<u>جدول التغيرات</u> :

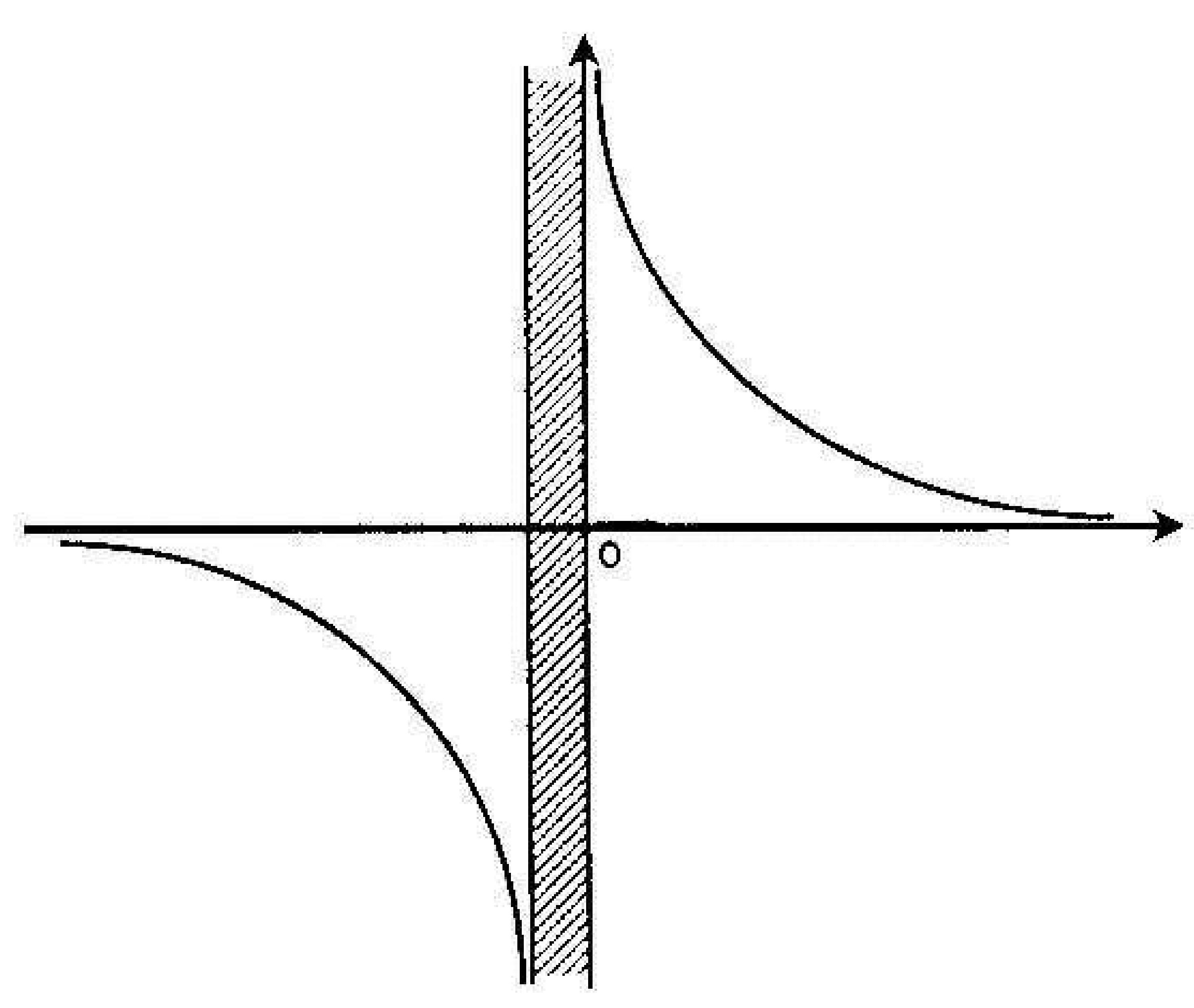
x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$			$-$
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$			$+\infty \searrow 0$

الفروع اللانهائية :

- المستقيمان اللذان معادلتهما $x = -1$ و $x = 0$ هما مستقيمان مقاربان للمنحني

- المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$

المنحني :



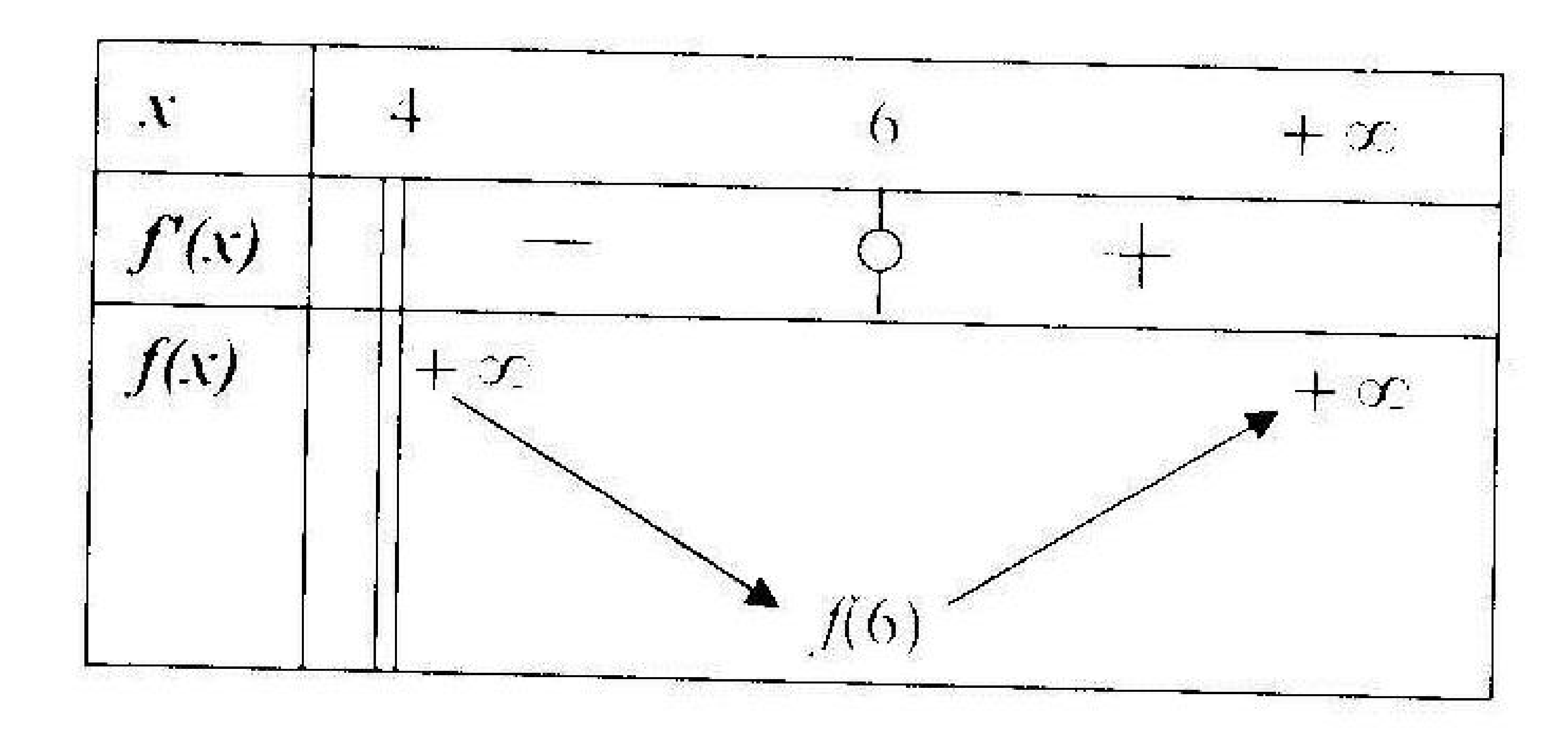
$$f(x)=\frac{x}{3}+\ln x-\ln(x-4) \quad (7$$

مجموعة التعريف : $D_f=]4,\ +\infty[$

حساب النهايات : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 4} f(x)=+\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

حساب المشتق : من أجل كل $x\in D_f$: $f'(x)=\dfrac{x^2-4x-12}{3x(x-4)}$

جدول التغيرات :

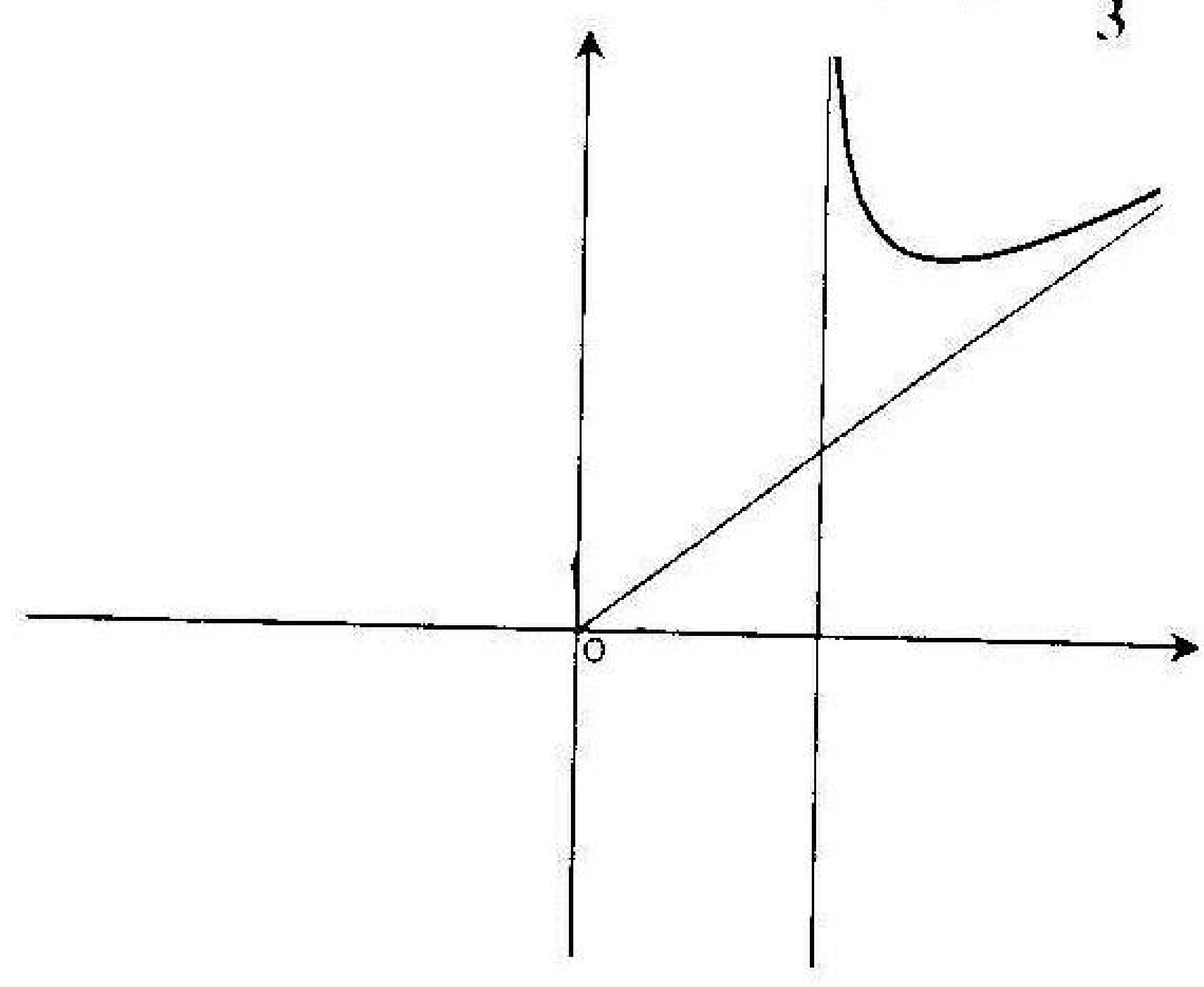


x	4		6		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(6)$	↗	$+\infty$

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $x=4$ هو مستقيم مقارب للمنحني.
- المستقيم ذو المعادلة $y=\dfrac{x}{3}$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(+\infty)$

المنحني :



$$f(x)=\frac{1}{x(1-\ln x)} \quad (8$$

<u>مجموعة التعريف</u> : $D_f=]0,\ e[\cup]e,\ +\infty[$

<u>حساب النهايات</u> :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} e} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=+\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} e} f(x)=+\infty$

<u>حساب المشتق</u> : من أجل كل $x\in D_f$: $f'(x)=\dfrac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$

<u>جدول التغيرات</u> :

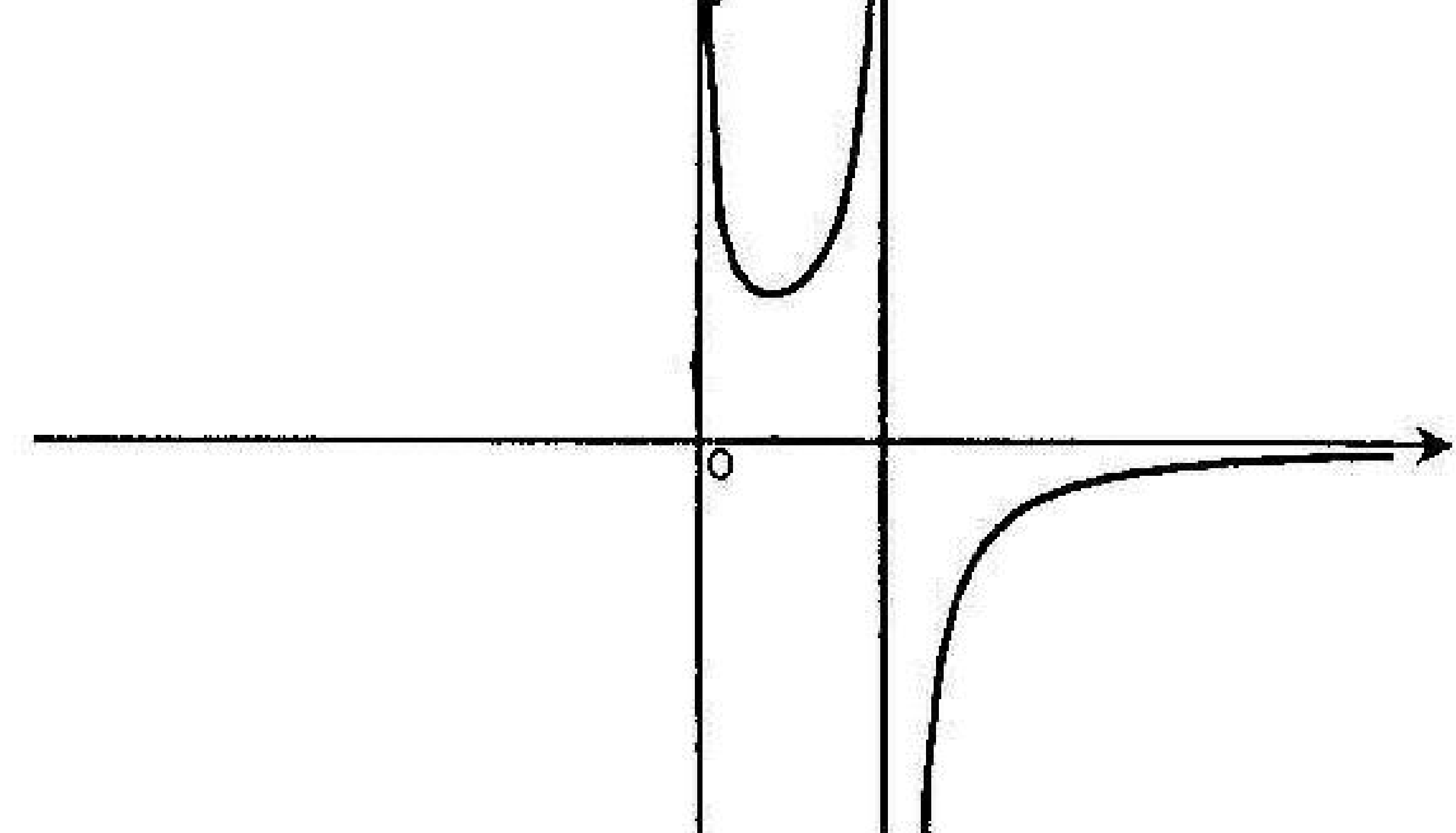
x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty \searrow$	1	$\nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow$	0

الفروع اللانهائية :

- المستقيمان اللذان معادلتهما $x=0$ و $x=e$ هما مستقيمان مقاربان للمنحني
- المستقيم ذو المعادلة $y=0$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(+\infty)$



المنحني :



(9 $\quad f(x) = (x-2) + (x-1)\ln\frac{1}{|x-1|}$

مجموعة التعريف : $D_f =]-\infty, \ 1[\cup]1, \ +\infty[$

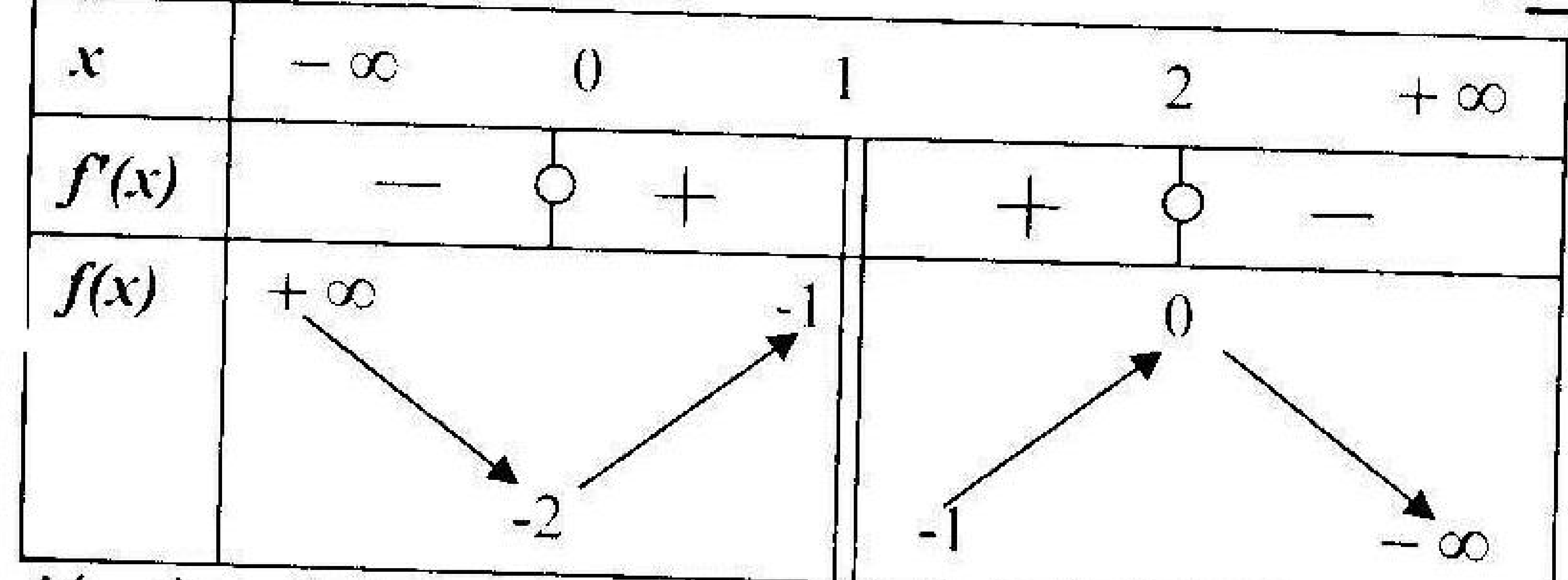
حساب النهايات:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -1$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$: $\quad f'(x) = -\ln|x-1|$

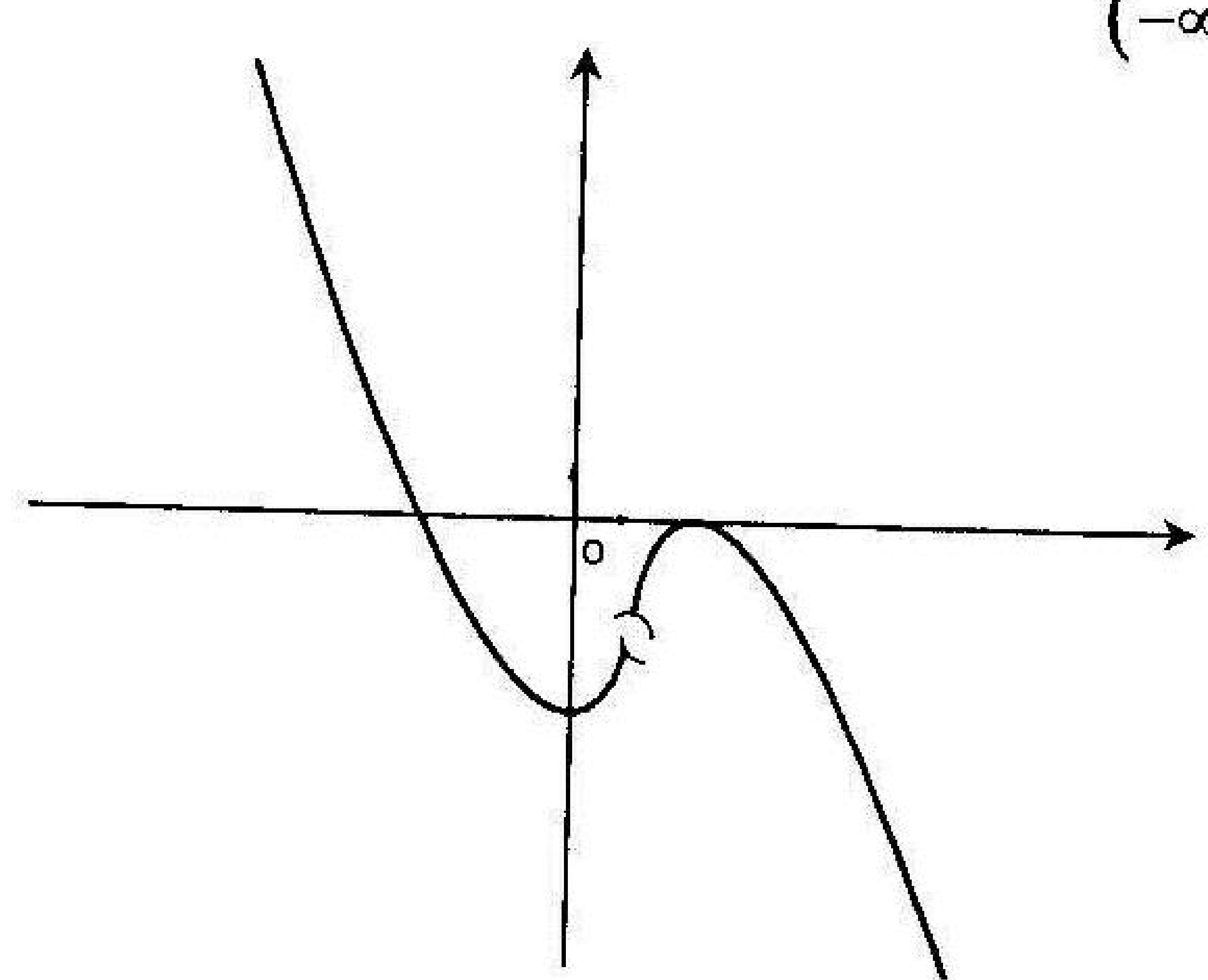
جدول التغيرات :



x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	-1 ‖ -1	↗	0	↘	$-\infty$

الفروع الانهائية : المنحني لـه فرع قطع مكافئ في اتجاه محور التراتيب (yy') في جوار $(+\infty)$ و $(-\infty)$

المنحني :



$$f(x)=\frac{\ln x}{x(\ln x-1)} \quad (10$$

<u>مجموعة التعريف</u> : $D_f=]0,\ e[\cup]e,\ +\infty[$

<u>حساب النهايات</u> :

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\xrightarrow{>}e} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\xrightarrow{<}e} f(x)=-\infty$

<u>حساب المشتق</u> : من أجل كل $x\in D_f$:
$$f'(x)=\frac{-\ln^2 x+\ln x-1}{x^2(\ln x-1)^2}$$

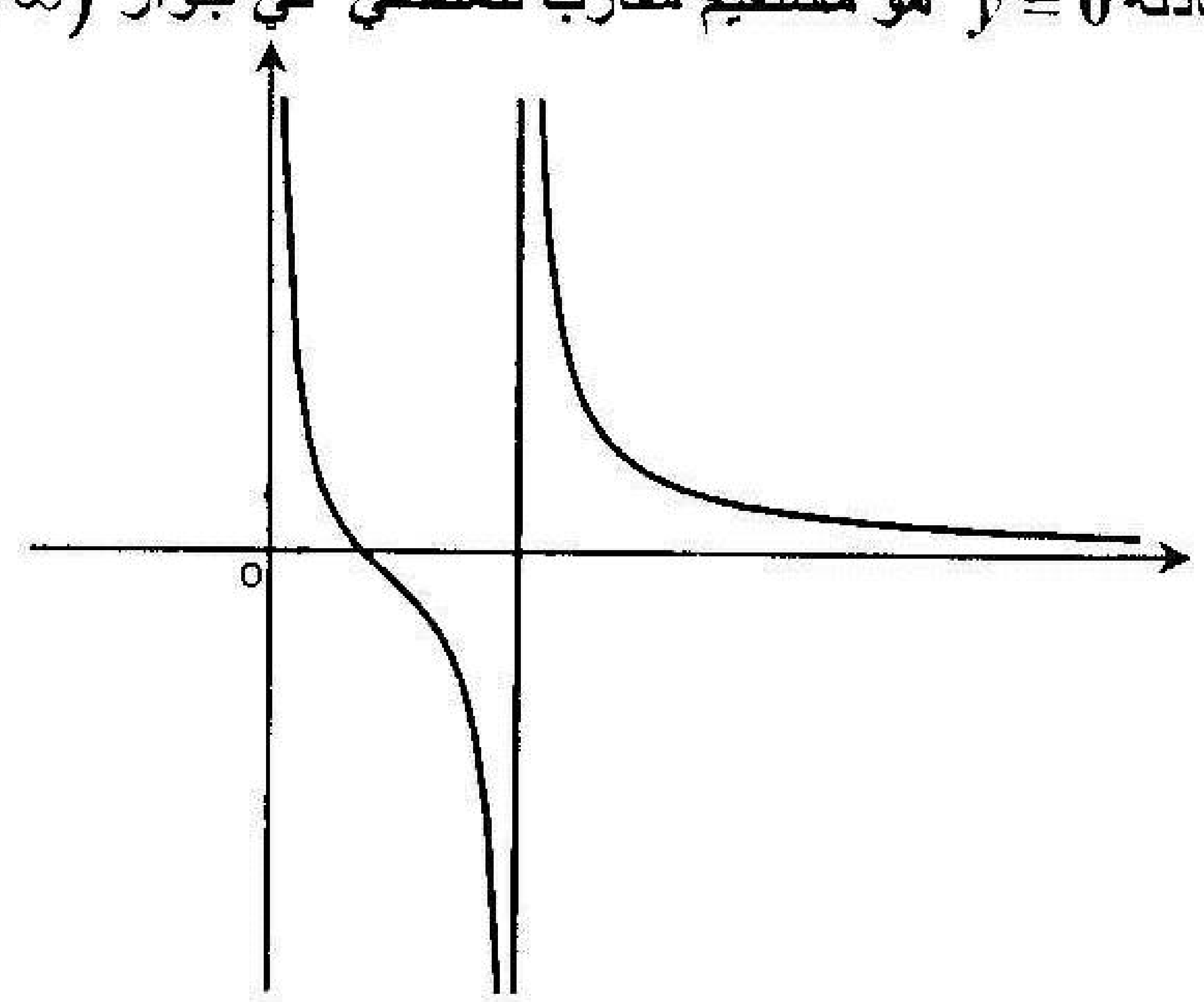
<u>جدول التغيرات</u> :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	‖	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$	

الفروع اللانهائية :

- المستقيمان اللذان معادلتهما $x=0$ و $x=e$ مستقيمان مقاربان للمنحني
- المستقيم ذو المعادلة $y=0$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(+\infty)$

المنحني :



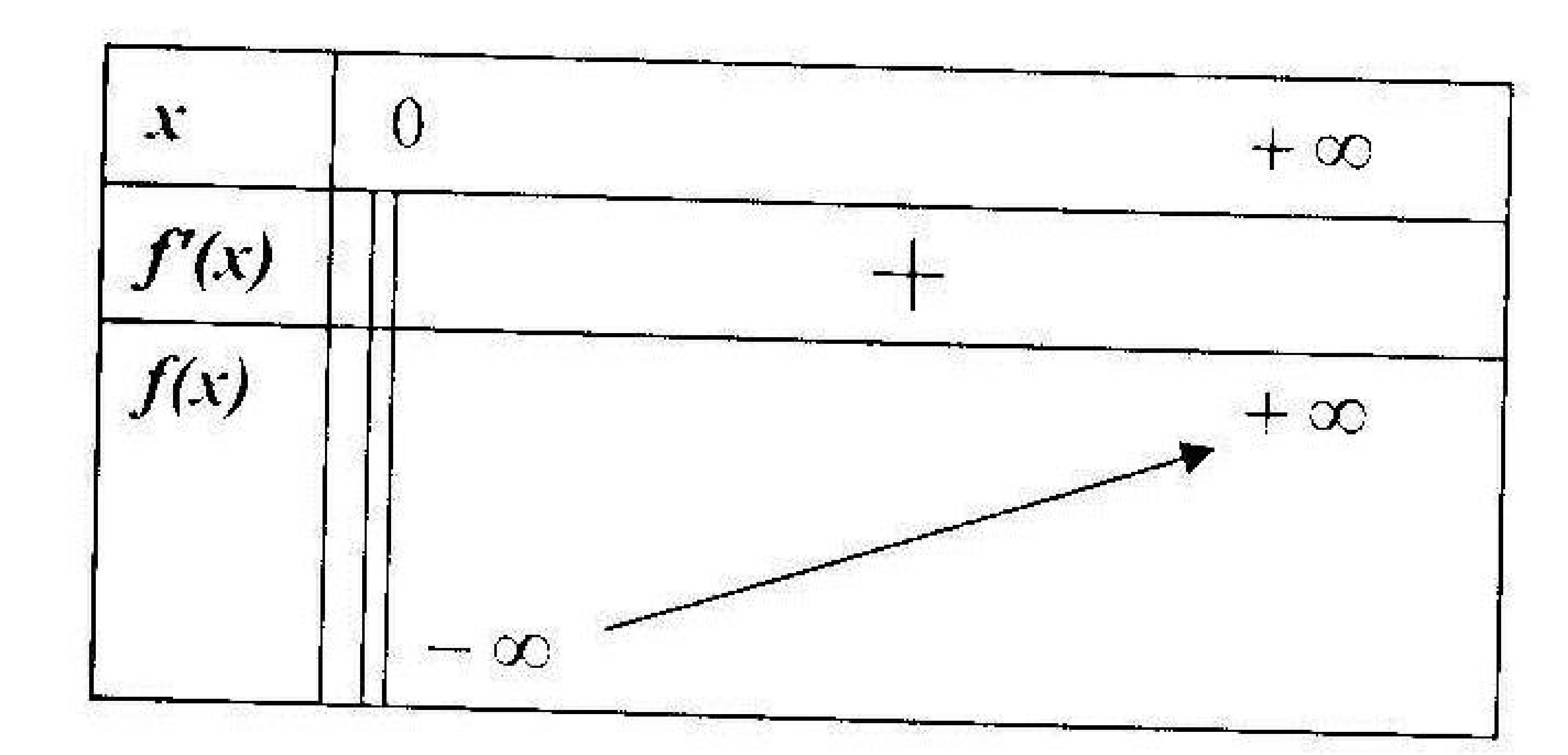
$$f(x)=x(-1+\ln x)+\frac{1+\ln x}{x} \quad (11$$

مجموعة التعريف : $D_f=]0,\ +\infty[$

حساب النهايات : $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

حساب المشتق : من أجل كل $x\in D_f$: $f'(x)=\frac{x^2-1}{x^2}\ln x$

جدول التغيرات :

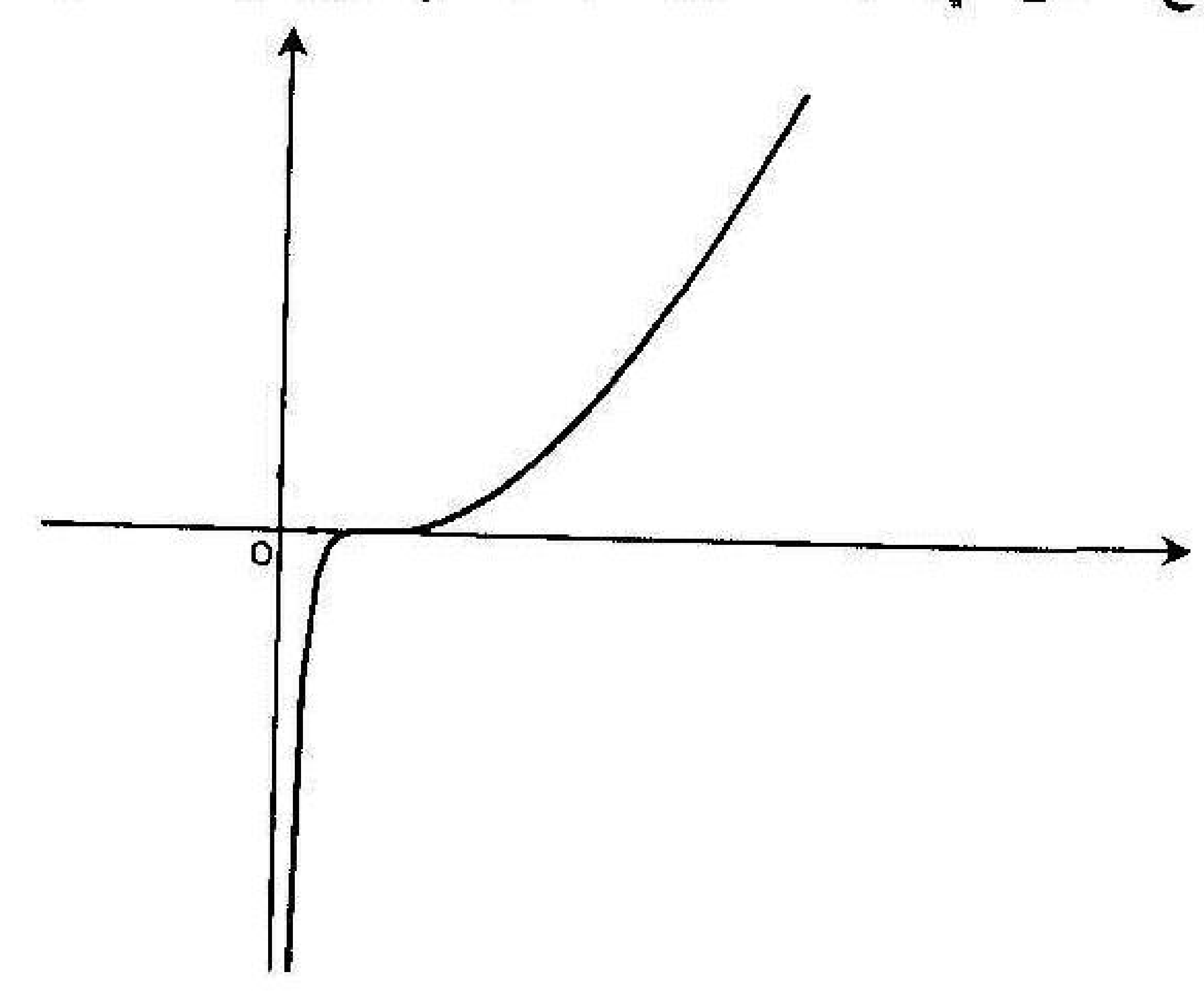


x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $x=0$ هو مستقيم مقارب للمنحني.
- المنحني له فرع قطع مكافئ في اتجاه محور التراتيب (yy') في جوار $(+\infty)$

المنحني :



$$f(x)=(x-1)\ln\frac{x}{x-1}+\ln x \quad (12$$

<u>مجموعة التعريف</u> : $D_f=]1,\ +\infty[$

<u>حساب النهايات</u> :

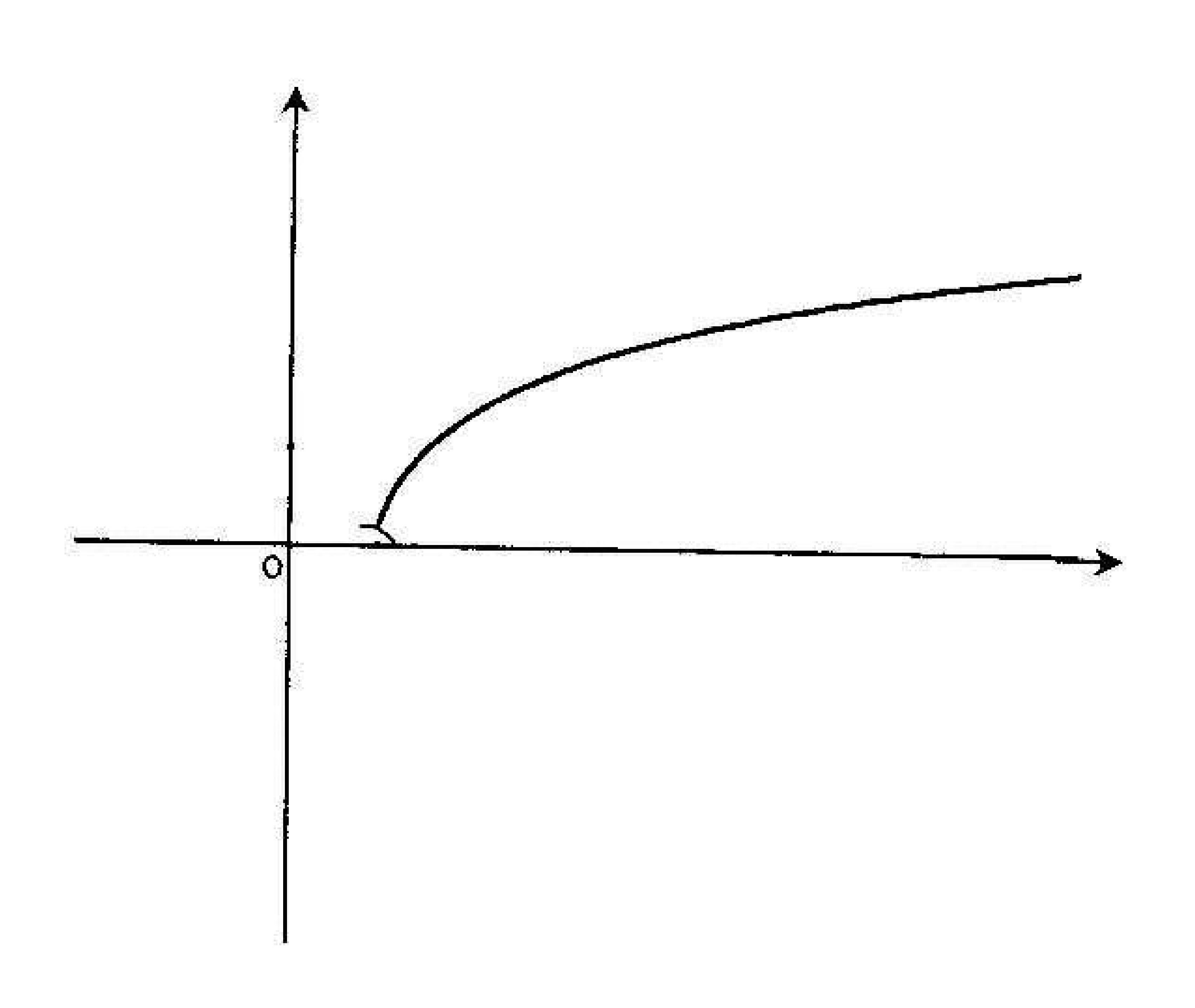
$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)=0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

<u>حساب المشتق</u> : من أجل كل $x\in D_f$: $f'(x)=\ln\frac{x}{x-1}$

<u>جدول التغيرات</u> :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖ 0	↗ $+\infty$

الفروع اللانهائية : المنحني له فرع قطع مكافئ في اتجاه محور الفواصل في جوار $(+\infty)$



مسـائـل محلولـة

مسألة 1

I. نعتبر الدالة العددية f المعرفة بـ : $f(x) = x - 1 + 2\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

نسمي (c) المنحني البياني للدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس .

1) أدرس تغيرات الدالة f .

2- أ) برهن بأن المنحني (c) يقبل ثلاث مستقيمات مقاربة يطلب تعيينها .

ب) أدرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل .

3) أثبت أن النقطة $\varpi\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ هي مركز تناظر المنحني (c).

4) برهن بأن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد $\alpha \in]1;2[$.

5) أرسم المنحني (c).

6-أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة عين على المجال $]-\lambda;+\infty[$ دالة أصلية للدالة : $x \to \ln|x+\lambda|$. ب) استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$

جـ) أحسب $S(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (c) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما : $x = \alpha$ ، $x = 1$.

د) تأكد أن : $S(\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha^2 + 2\alpha - 3) + 2\ln\frac{\alpha}{4}$.

II. (u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_n = f(n) - n + 1$

1) برهن أن (u_n) متتالية متزايدة .

2) نضع $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. احسب S_n بدلالة n ، ثم $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

الحـل

I. 1) دراسة تغيرات الدالة f

<u>مجموعة تعريف</u> : تكون الدالة f معرفة إذا كان $\frac{x}{x+1} > 0$ ومنه $x(x+1) > 0$

ومنه : $D_f =]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$

<u>حساب النهايات</u> : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \xrightarrow{<} -1} f(x) = +\infty$

<u>حساب المشتق ودراسة إشارته</u> : من أجل كل $x \in D_f$ فإن :

$$f'(x) = \left[x - 1 + 2\ln|x| - 2\ln|x+1|\right]' = 1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x+1} = \frac{x^2 + x + 2}{x(x+1)}$$

من أجل $x \in D_f$: $x(x+1) > 0$ و $x^2 + x + 2 > 0$ اذن $f'(x) > 0$

<u>جدول التغيرات</u> :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	‖	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

2- ا) البرهان على أن المنحني (c) يقبل ثلاثة مستقيمات مقاربة

لدينا $\lim_{x \xrightarrow{<} -1} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = -\infty$ إذن المستقيمان اللذان معادلتاهما :

$x = 0$ و $x = -1$ هما مستقيمان مقاربان للمنحني (c).

$\lim_{|x| \to +\infty} \left[f(x) - (x-1)\right] = \lim_{|x| \to +\infty} 2\ln\frac{x}{x+1} = 0$ ، إذن المستقيم (D) ذي المعادلة $y = x - 1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c) في جوار $(-\infty)$ وفي جوار $(+\infty)$.

ب) وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل (D)

$f(x) - (x-1) > 0$ ومنه $\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) > 0$ ومنه $\frac{x}{x+1} > 1$ ومنه $\frac{-1}{x+1} > 0$

ومنه $x + 1 < 0$ ومنه $x \in \left]-\infty; -1\right[$ ، في هذا المجال يكون المنحني (c) فوق المستقيم (D). $f(x) - (x-1) < 0$ من أجل $x \in \left]0; +\infty\right[$ ، على هذا المجال يكون المنحني (c) تحت المستقيم (D).

3) إثبات أن النقطة $\varpi\left(\frac{-1}{2};\frac{-3}{2}\right)$ هي مركز تناظر المنحني (c)

إذا كان $x \in D_f$ فإن $(-1-x) \in D_f$:

$$f(-1-x)+f(x)=-x-2+2\ln\frac{x+1}{x}+x-1+2\ln\frac{x}{x+1}=$$

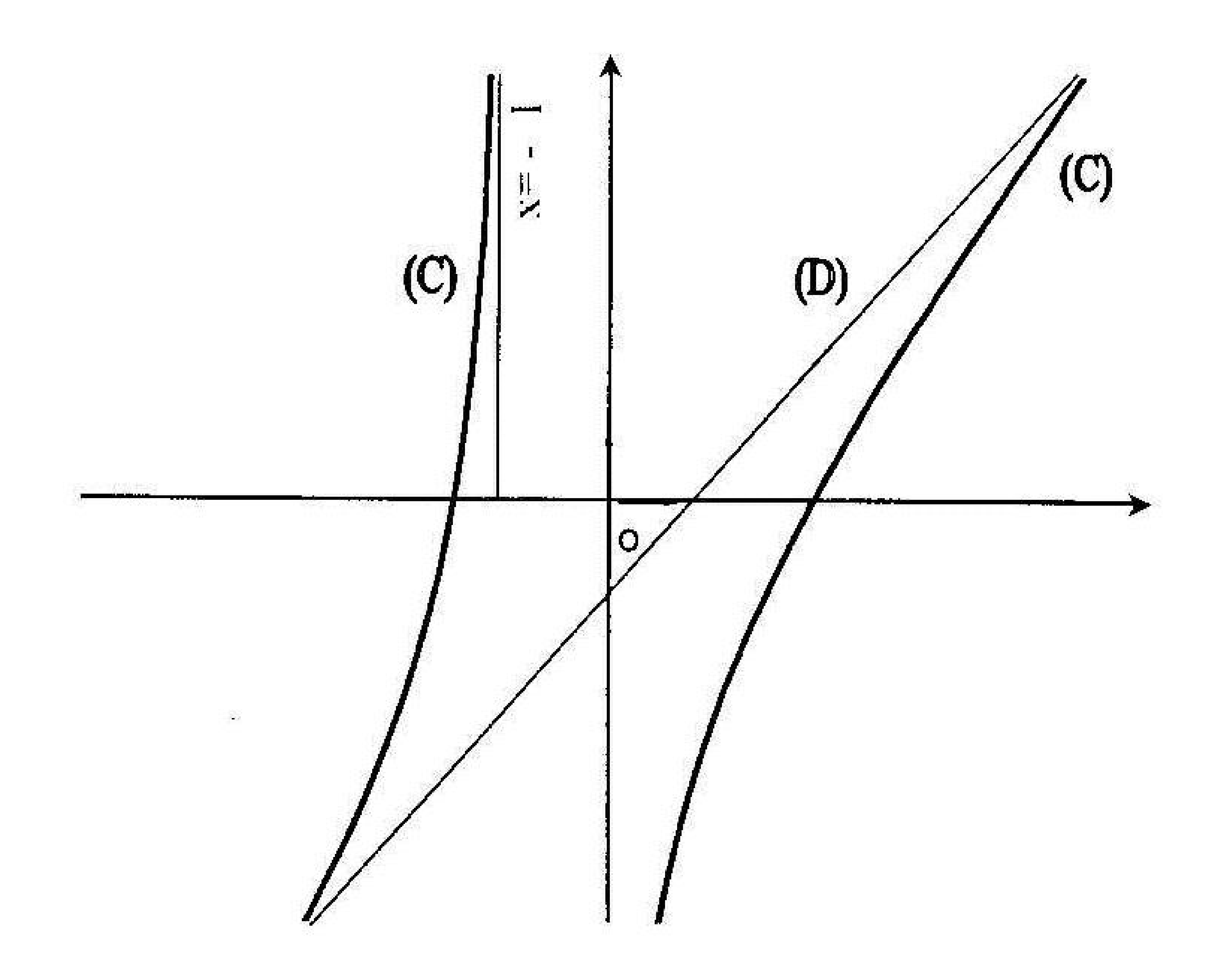
$$=-3+2\left[\ln\frac{x+1}{x}+\ln\frac{x}{x+1}\right]=-3+2\ln\frac{x+1}{x}\times\frac{x}{x+1}=-3+2\ln 1=-3$$

بما أن $f(-1-x)+f(x)=-3$ فالنقطة $\varpi\left(\frac{-1}{2};\frac{-3}{2}\right)$ هي مركزتناظرالمنحني (c)

4) البرهان على أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد $\alpha \in]1;2[$

على المجال $]1;2[$ الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما ، ولدينا: $f(1)=-2\ln 2$ و $f(2)=1+\ln\frac{3}{2}$. العدد 0 محصور بين $f(1)$ و $f(2)$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد $\alpha \in]1;2[$.

5) رسم المنحني (c)



6- أ) تعيين دالة أصلية للدالة $x \to \ln|x+\lambda|$.

بوضع $u'(x) = 1$ ومنه $u(x) = x$ و $v(x) = \ln|x+\lambda|$ ومنه $v'(x) = \dfrac{1}{x+\lambda}$

$$\int \ln|x+\lambda|dx = x\ln|x+\lambda| - \int \frac{x}{x+\lambda}dx = x\ln|x+\lambda| - \int\left(1 - \frac{\lambda}{x+\lambda}\right)dx =$$

$$= x\ln|x+\lambda| - x + \lambda\ln|x+\lambda| + c = (x+\lambda)\ln|x+\lambda| - x + c$$

على المجال $]-\lambda;+\infty[$ تكون الدالة الأصلية للدالة $x \to \ln|x+\lambda|$ هي :

$x \to (x+\lambda)\ln(x+\lambda) - x + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$

ب)استنتاج دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$

من أجل $x \in]0;+\infty[$ لدينا: $f(x) = x - 1 + 2[\ln x - \ln(x+1)]$.

حسب السؤال السابق وباستبدال $\lambda = 0$ و $\lambda = 1$ في $\int \ln|x+\lambda|dx$ نجد :

$\int \ln x dx = x\ln x - x$ و $\int \ln(x+1)dx = (x+1)\ln(x+1) - x$ إذن :

$$\int f(x)dx = \frac{x^2}{2} - x + 2[x\ln x - x - (x+1)\ln(x+1) + x] =$$

$$= \frac{x^2}{2} - x + 2[x\ln x - (x+1)\ln(x+1)] + c$$

جـ) حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (c)والمستقيمات التي معادلاتها : $y = 0$ ، $x = \alpha$ ، $x = 1$

$$S(\alpha) = -\int_1^\alpha f(x)dx = \left[-\frac{x^2}{2} + x - 2x\ln x + 2(x+1)\ln(x+1)\right]_1^\alpha =$$

$$= -\frac{\alpha^2}{2} + \alpha - 2\alpha\ln\alpha + 2(\alpha+1)\ln(\alpha+1) - \left(-\frac{1}{2} + 1 + 4\ln 2\right) =$$

$$= -\frac{\alpha^2}{2} + \alpha - 2\alpha\ln\alpha + 2(\alpha+1)\ln(\alpha+1) - \frac{1}{2} - 4\ln 2$$

د) التأكد أن : $S(\alpha) = \dfrac{1}{2}(\alpha^2 + 2\alpha - 3) + 2\ln\dfrac{\alpha}{4}$

نعلم أن $f(\alpha) = 0$ أي $\alpha - 1 + 2\ln\dfrac{\alpha}{\alpha+1} = 0$ ومنه

وبتعويض $2\ln(\alpha+1)=(\alpha-1)+2\ln\alpha$ في $2\ln(\alpha+1)$ في $S(\alpha)$ نجد :

$$S(\alpha)=-\frac{\alpha^2}{2}+\alpha-2\alpha\ln\alpha+(\alpha+1)[\alpha-1+2\ln\alpha]-\frac{1}{2}-4\ln 2$$

$$=-\frac{\alpha^2}{2}+\alpha-2\alpha\ln\alpha+(\alpha^2-1)+2\alpha\ln\alpha+2\ln\alpha-\frac{1}{2}-4\ln 2$$

$$=\frac{\alpha^2}{2}+\alpha-\frac{3}{2}+2\ln\alpha-4\ln 2=\frac{1}{2}(\alpha^2+2\alpha-3)+2(\ln\alpha-\ln 4)$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha^2+2\alpha-3)+2\ln\frac{\alpha}{4}$$

.II 1) البرهان على أن (u_n) متتالية متزايدة

$u_n=f(n)-n+1=2\ln\frac{n}{n+1}$. من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن :

$$u_{n+1}-u_n=2\left[\ln\frac{n+1}{n+2}-\ln\frac{n}{n+1}\right]=2\ln\frac{n+1}{n+2}\times\frac{n+1}{n}=$$

$$2\ln\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}=2\ln\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)>0$$ (لأن $1+\frac{1}{n^2+2n}>1$)

بما أن $u_{n+1}-u_n>0$ فالمتتالية (u_n) متزايدة .

2) حساب S_n و $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

$$S_n=u_1+u_2+...+u_n=2\ln\frac{1}{2}+2\ln\frac{2}{3}+...+2\ln\frac{n}{n+1}=$$

$$=2[\ln 1-\ln 2+\ln 2-\ln 3+...+\ln(n)-\ln(n+1)]=-2\ln(n+1)$$

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}(-2)\ln(n+1)=-\infty$$

مسألة 2

لتكن الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ : $g(x)=\frac{x}{x-1}+\ln|x-1|$

1- أ) أدرس تغيرات الدالة g. ب) أحسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$.

2) نعتبر الدالة العددية f والمعرفة بـ : $f(x)=x\ln|x-1|$ وليكن (c)

المنحني البياني لها في معلم متعامد ومتجانس .

أ) أدرس تغيرات الدالة f . ب) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c).

جـ) بين أن المنحني (c) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها ثم اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (c) عند هذه النقطة .

د) أحسب إحداثيات نقاط التقاطع بين المنحني (c) والمستقيم ذو المعادلة $y = x$.

3) أرسم المنحني (c). 4- أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;1[$ فإن : $\frac{x^2}{x-1} = x+1+\frac{1}{x-1}$.

ب) باستعمال المكاملة بالتجزئة عين على المجال $]0;1[$ دالة أصلية للدالة f .

جـ) λ عدد حقيقي من المجال $]0;1[$. أحسب المساحة $S(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (c) والمستقيمات التي معادلاتها : $y=0$, $x=\lambda$, $x=0$

د) احسب $\lim_{\lambda \to 1} S(\lambda)$.

الحل

1- أ) دراسة تغيرات الدالة g

<u>مجموعة تعريف</u> : $D_g =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

<u>حساب النهايات</u> :

$$\lim_{|x| \to +\infty} g(x) = +\infty \quad , \lim_{x \to 1} g(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to 1} g(x) = +\infty$$

<u>حساب المشتق ودراسة إشارته</u> : من أجل كل $x \in D_g$ لدينا :

$$g'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} = \frac{-1+(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{x-2}{(x-1)^2}$$

<u>جدول التغيرات الدالة</u> g :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$ ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

ب) حساب $g(0)$ ودراسة إشارة $g(x)$

$g(0)=0$. من جدول تغيرات الدالة g نستنتج أن :

$g(x)>0$ من أجل كل $x\in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$ و $g(x)<0$ من أجل $x\in]0;1[$

2- أ) دراسة تغيرات الدالة f

مجموعة التعريف : $D_f=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

حساب النهايات :

$\lim_{x\to 1} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

حساب المشتق ودراسة إشارته : من أجل كل $x\in D_f$: $f'(x)=g(x)$.

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$.

جدول التغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

ب) دراسة الفروع اللانهائية للمنحني (c)

المستقيم ذي المعادلة $x=1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c)

$\lim_{|x|\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{|x|\to+\infty}\ln|x-1|=+\infty$. إذن المنحني (c) له فرع قطع مكافئ في اتجاه محور التراتيب في جوار $(-\infty)$ وفي جوار $(+\infty)$

جـ) اثبات أن المنحني (c) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها

لدينا $f'(x)=g(x)$ ومنه $f''(x)=g'(x)$ ونعلم أن $g'(2)=0$ إذن $f''(2)=0$. بما أن $f''(x)$ تنعدم من أجل $x=2$ ومغيرا إشارته عند هذه النقطة ،

فالمنحني (c) يقبل نقطة انعطاف وهي النقطة $(2;0)$. معادلة المماس (Δ)

للمنحني (c) عند النقطة $(2;0)$ هي : $y=f'(2)(x-2)+f(2)=2(x-2)$

د) تعيين إحداثيات نقاط التقاطع المنحني (c) مع المستقيم ذي المعادلة $y=x$

فواصل نقاط التقاطع المنحني (c) مع المستقيم ذي المعادلة $y=x$ هي حلول المعادلة:

$f(x)=x$ أي $x\ln|x-1|=x$ ومنه $x(\ln|x-1|-1)=0$ ومنه

$x=0$ أو $\ln|x-1|=1$ ومنه ($x=0$ أو $|x-1|=e$) ومنه :

($x=0$ أو $x=1-e$ أو $x=1+e$) إذن المنحني (c) يقطع المستقيم $y=x$

في ثلاثة نقاط $(1+e;1+e)$, $(1-e;1-e)$, $(0;0)$

3) رسم المنحني (c)

4) ا) التحقق من أن على المجال $]0;1[$: $\frac{x^2}{x-1}=x+1+\frac{1}{x-1}$

$$x+1+\frac{1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)+1}{x-1}=\frac{x^2-1+1}{x-1}=\frac{x^2}{x-1}$$

ب) تعيين على المجال $]0;1[$ دالة أصلية للدالة f

$\int f(x)dx=\int x\ln|x-1|dx$. نستعمل المكاملة بالتجزئة لحساب هذا التكامل

نضع : $u'(x)=x$ ومنه $u(x)=x^2/2$

و $v(x)=\ln|x-1|$ ومنه $v'(x)=\dfrac{1}{x-1}$.

$$\int x\ln|x-1|\,dx=\frac{x^2}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x-1}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\int\left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|\right]+c$$

على المجال $]0;1[$ تكون الدالة الأصلية للدالة f هي:

$$\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)\ln(1-x)-\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}+c$$

جـ) حساب المساحة $S(\lambda)$

$$S(\lambda)=-\int_0^{\lambda}f(x)\,dx=-\left[\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)\ln(1-x)-\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}\right]_0^{\lambda}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\lambda^2\right)\ln(1-\lambda)+\frac{\lambda^2}{4}+\frac{\lambda}{2}\quad(u.a)$$

د) حساب $\lim\limits_{\lambda\to 1}S(\lambda)$

$$\lim_{\lambda\to 1}S(\lambda)=\lim_{\lambda\to 1}\frac{1}{2}\left(1-\lambda^2\right)\ln(1-\lambda)+\frac{\lambda^2}{4}+\frac{\lambda}{2}=$$

$$=\lim_{\lambda\to 1}\frac{1}{2}(1+\lambda)(1-\lambda)\ln(1-\lambda)+\frac{\lambda^2}{4}+\frac{\lambda}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

(لأن $\lim\limits_{\lambda\to 1}(1-\lambda)\ln(1-\lambda)=0$)

مسألة 3

I. g دالة عددية ذات المتغير الحقيقي x ومعرفة بـ: $g(x)=\dfrac{x+1}{2x+1}-\ln x$

1) أدرس تغيرات الدالة g.

2- أ) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α على المجال $]0;+\infty[$

ب) بين أن $1,8<\alpha<2$. 3) استنتج إشارة $g(x)$.

II. لتكن الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x^2+x}$. نسمي (c) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(0;\vec{i};\vec{j})$ (طول الوحدة $2cm$).

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ وفسر هندسيا النتيجة.

2- أ)بين أن من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ فإن : $f'(x)=\dfrac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}g(x)$

ب) استنتج تغيرات الدالة f . ج) بين أن $f(\alpha)=\dfrac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ ثم أعطي حصرا لـ $f(\alpha)$. 3) أنشئ المنحني (c).

4) نعتبر S مساحة الحيز للمستوي الممثل بمجموعة النقط $M(x;y)$ حيث: $\begin{cases}1\le x\le 3/2\\ 0\le y\le f(x)\end{cases}$

أ) بين أن من أجل كل عدد حقيقي x أكبر أو يساوي 1فإن : $\dfrac{\ln x}{x^2}\le f(x)\le\dfrac{\ln x}{x}$. ب) أحسب $u=\displaystyle\int_1^{3/2}\frac{\ln x}{x}dx$

جـ)باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب $v=\displaystyle\int_1^{3/2}\frac{\ln x}{x^2}dx$ ثم استنتج حصرا للعدد $p=\displaystyle\int_1^{3/2}f(x)dx$. د) عبر عن S بدلالة p واستنتج حصرا لـ S .

الحـل

I. 1) دراسة تغيرات الدالة g

مجموعة تعريف : $D_g=]0;+\infty[$

حساب النهايات : $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

حساب المشتق ودراسة إشارته : من أجل كل $x\in D_g$ لدينا :

$$g'(x)=\frac{2x+1-2(x+1)}{(2x+1)^2}-\frac{1}{x}=-\left[\frac{1}{(2x+1)^2}+\frac{1}{x}\right]<0$$

جدول تغيرات الدالة g :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$
$g(x)$	‖ $+\infty$	$-\infty$

2- أ) إثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α على المجال $]0;+\infty[$

على المجال $]0;+\infty[$ الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما .

لدينا : $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

العدد0 ينتمي إلى المجال $]-\infty;+\infty[$ ، إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α ينتمي إلى المجال $]0;+\infty[$.

ب) إثبات أن $1,8<\alpha<2$

$g(2)=-0,09$, $g(1,8)=0,02$ و $g(\alpha)=0$ ، العدد 0 محصور بين $g(2)$ و $g(1,8)$ ، إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة العدد α ينتمي إلى المجال $]1,8;2[$

3) استنتاج إشارة $g(x)$

من جدول التغيرات للدالة g نستنتج أن : $g(x)>0$ من أجل كل $x\in]0;\alpha[$

$g(x)<0$ من أجل كل $x\in]\alpha;+\infty[$

II. 1) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ مع التفسير الهندسي

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\ln x}{x^2+x}=-\infty$ إذن المستقيم(محور الترتيب) هو مستقيم مقارب للمنحني (c) .

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x}{x}\times\dfrac{1}{x+1}=0$

ومنه المستقيم (محو ر الفواصل) هو مستقيم مقارب للمنحني (c) في جوار $(+\infty)$.

2- أ) البرهان على أن $f'(x)=\dfrac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}\times g(x)$

من أجل كل $x\in D_f$:

$$f'(x)=\frac{\frac{2}{x}(x^2+x)-(2x+1)\times 2\ln x}{(x^2+x)^2}=\frac{2(x+1)-2(2x+1)\ln x}{(x^2+x)^2}=$$

$$=\frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}\times\left(\frac{x+1}{2x+1}-\ln x\right)=\frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}\times g(x)$$

ب) تغيرات الدالة f

من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ فتكون إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ ومنه :

$f'(x)>0$ من أجل كل $x\in]0;\alpha[$ و $f'(x)<0$ من أجل $x\in]\alpha;+\infty[$

<u>جدول تغيرات الدالة</u> f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0

جـ) إثبات أن : $f(\alpha)=\dfrac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ وتعيين حصرا لـ $f(\alpha)$

$f(\alpha)=\dfrac{2\ln\alpha}{\alpha^2+\alpha}$ ونعلم أن $g(\alpha)=0$ أي $\dfrac{\alpha+1}{2\alpha+1}-\ln\alpha=0$ ومنه

$\ln\alpha=\dfrac{\alpha+1}{2\alpha+1}$. وبتعويض عبارة $\ln\alpha$ في $f(\alpha)$ نجد :

$$f(\alpha)=\frac{2(\alpha+1)}{(\alpha^2+\alpha)(2\alpha+1)}=\frac{2(\alpha+1)}{\alpha(\alpha+1)(2\alpha+1)}=\frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$$

لدينا $1,8 < \alpha < 2$ ومنه $4,6 < 2\alpha + 1 < 5$

ومنه $1,8 \times 4,6 < \alpha(2\alpha+1) < 2\times 5$ و منه $8,28 < \alpha(2\alpha+1) < 10$ ومنه

$\frac{1}{10} < \frac{1}{\alpha(2\alpha+1)} < \frac{1}{8,28}$ ومنه $\frac{1}{5} < \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)} < \frac{1}{4,14}$

ومنه : $0,2 < f(\alpha) < 0,24$

3) إنشاء المنحني (c)

4-أ)إثبات أن من أجل x أكبر أو يساوي 1فإن : $\frac{\ln x}{x^2} \le f(x) \le \frac{\ln x}{x}$

لدينا من أجل x أكبر أو يساوي 1 :

$$f(x) - \frac{\ln x}{x} = \frac{2\ln x}{x(x+1)} - \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)\frac{\ln x}{x} \le 0$$

(لأن $\frac{\ln x}{x} \ge 0$ و $\frac{1-x}{1+x} \le 0$ من أجل x أكبر أو يساوي 1) ومنه $f(x) \le \frac{\ln x}{x}$

$$f(x) - \frac{\ln x}{x^2} = \frac{2\ln x}{x(x+1)} - \frac{\ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{x} \times \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x}\right) =$$

$\frac{x-1}{x(x+1)} \times \frac{\ln x}{x} \ge 0$ (لأن $\frac{\ln x}{x} \ge 0$ و $\frac{x-1}{x(x+1)} \ge 0$ لما $x \ge 1$)

ومنه $f(x) \geq \frac{\ln x}{x^2}$ ، إذن : $\frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$

ب) حساب $u = \int_1^{3/2} \frac{\ln x}{x} dx$

$$\int_1^{3/2} \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^{3/2} \frac{1}{x} \times \ln x \, dx = \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_1^{3/2} = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{3}{2} \right)^2$$ (شكل $\int u'u = \frac{u^2}{2}$)

جـ) حساب بالمكاملة بالتجزئة $v = \int_1^{3/2} \frac{\ln x}{x^2} dx$

بوضع $h'(x) = \frac{1}{x^2}$ و منه $h(x) = -\frac{1}{x}$ و $p(x) = \ln x$ ومنه $p'(x) = \frac{1}{x}$

$$v = \int_1^{3/2} \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \ln x \right]_1^{3/2} + \int_1^{3/2} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} \right]_1^{3/2} = \frac{1}{3} \left(1 - 2 \ln \frac{3}{2} \right)$$

استنتاج حصرا للعدد $p = \int_1^{3/2} f(x) dx$

لدينا : $\frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$ ومنه $\int_1^{3/2} \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \int_1^{3/2} f(x) dx \leq \int_1^{3/2} \frac{\ln x}{x} dx$

ومنه $v \leq p \leq u$ و منه $\frac{1}{3} \left(1 - 2 \ln \frac{3}{2} \right) \leq p \leq \frac{1}{2} \left(\ln \frac{3}{2} \right)^2$

د) حساب S بدلالة P

$S = \int_1^{3/2} f(x) dx = p \times (u.a) = p \times 4cm^2$ (لأن $u.a = 2cm \times 2cm$)

لدينا $\frac{1}{3} \left(1 - 2 \ln \frac{3}{2} \right) \leq p \leq \frac{1}{2} \left(\ln \frac{3}{2} \right)^2$ ومنه

$\frac{4}{3} \left(1 - 2 \ln \frac{3}{2} \right) \leq 4p \leq 2 \left(\ln \frac{3}{2} \right)^2$ إذن : $\frac{4}{3} \left(1 - 2 \ln \frac{3}{2} \right) \leq S \leq 2 \left(\ln \frac{3}{2} \right)^2$

مسألة 4

نعتبر الدالة g المعرفة بـ : $g(x)=\ln(x+2)-\ln x-\frac{2}{x+2}+\frac{1}{2}$.

1) أدرس تغيرات الدالة g . 2) استنتج إشارة $g(x)$

لتكن الدالة f المعرفة بـ :
$$\begin{cases} f(x)=x\times\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)+\frac{x}{2}+1 \;;\; x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$$

نسمي (c) الممثل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(0;\vec{i};\vec{j})$.

3) أحسب $\lim\limits_{x \to 0} x\times\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$ واستنتج أن الدالة f مستمرة على يمين $x=0$.

4- أ) هل الدالة g قابلة الاشتقاق على يمين النقطة $x=0$ ؟ فسر هندسيا النتيجة .

ب) برهن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)=2$ (يمكنك وضع $h=\frac{1}{x}$ للوصول إلى نهاية شهيرة)

5) أدرس تغيرات الدالة f (ملاحظة : $f'(x)=g(x)$) .

6- أ) برهن بأن المستقيم (D) ذي المعادلة $y=\frac{x}{2}+3$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c)

ب) أنشئ المنحني (c).

7) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة : $f(x)=\frac{x}{2}+m$

8- أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة عين على المجال $]0;+\infty[$:

$$\int x\times\ln x\,dx \quad , \quad \int x\times\ln(x+2)\,dx$$

ب) أحسب المساحة $S(\alpha)$ المحصورة بين المنحني (c) والمستقيمات التي معادلاتها :

$x=\alpha$, $x=1$, $y=x$ (α هي فاصلة نقطة تقاطع (c) مع المستقيم $y=x$)

الحل

1) دراسة تغيرات الدالة g

مجموعة تعريف : g معرفة إذا كان $x>-2$ و $x>0$ ، إذن $D_g=]0;+\infty[$

حساب النهايات :

($\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x+1}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)=\ln 1=0$ لأن) $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}g(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\ln(x+2)-\ln x-\frac{2}{x+2}+\frac{1}{2}=+\infty$$

<u>حساب المشتق ودراسة إشارته</u> : من أجل كل $x\in D_g$:

$$g'(x)=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x}+\frac{2}{(x+2)^2}=\frac{x(x+2)-(x+2)^2+2x}{x(x+2)^2}=\frac{-4}{x(x+2)^2}<0$$

<u>جدول التغيرات</u> g :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘ $1/2$

2) إشارة $g(x)$

من جدول تغيرات الدالة g نستنتج أن $g(x)>0$ من أجل كل $x\in D_g$.

3) حساب $\lim_{x\xrightarrow{>}0}x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$

$\lim_{x\xrightarrow{>}0}x\times\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$ (لدينا حالة عدم تعيين من الشكل $0\times\infty$) .

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)=$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}x\left[\ln(x+2)-\ln x\right]=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[x\ln(x+2)-x\ln x\right]=0$$

<u>استمرارية الدالة</u> f <u>عند</u> $x=0$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[x\times\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)+\frac{x}{2}+1\right]=1=f(0)$$

إذن الدالة f مستمرة على يمين $x = 0$.

4- أ) قابلية الاشتقاق الدالة f على يمين $x = 0$ والتفسير الهندسي للنتيجة

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) + \frac{1}{2} = +\infty$ ، إذن الدالة f غير قابلة الاشتقاق على يمين $x = 0$ وتفسر هذه النتيجة بأن المنحني (c) يقبل مماسا على يمين 0 يوازي محور الترتيب .

ب) البرهان على أن : $\lim_{x \to +\infty} x \times \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) = 2$

بوضع $\frac{1}{x} = h$ ومنه $x = \frac{1}{h}$ و لما $x \to +\infty$ فإن $h \to 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} x \times \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1 + 2h)}{h} = \lim_{h \to 0} 2 \times \frac{\ln(1 + 2h)}{2h} = 2 \times 1 = 2$$

5) دراسة تغيرات الدالة f

مجموعة تعريف : $D_f = [0; +\infty[$

حساب النهايات : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} x \times \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) + \frac{x}{2} + 1 = +\infty$

حساب المشتق ودراسة إشارته : من اجل كل $x \in]0; +\infty[$ لدينا : $f'(x) = g(x)$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$

جدول تغيرات الدالة f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$
$f(x)$	1 ↗	$+\infty$

6- أ) البرهان على أن المستقيم (D) ذي المعادلة $y = \frac{x}{2} + 3$ هو مستقيم

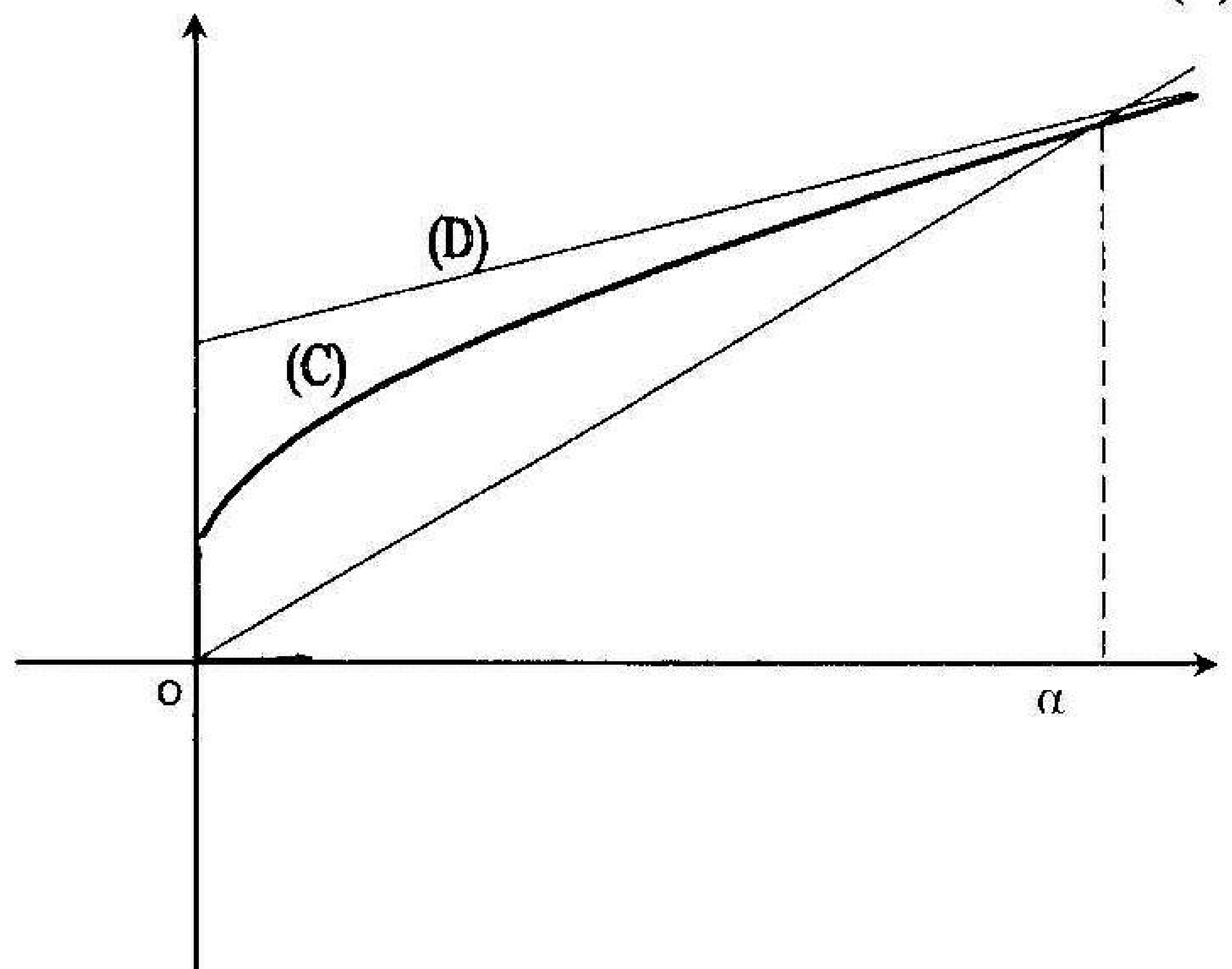
مقارب للمنحني (c)

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(\frac{x}{2}+3\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}x\times\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)-2=2-2=0$$

حسب التعريف فالمستقيم (D)ذي المعادلة $y=\frac{x}{2}+3$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c)

في جوار $(+\infty)$

ب) رسم المنحني (c).



7) المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة $f(x)=\frac{x}{2}+m$

المستقيم (D_m)ذو المعادلة $y=\frac{x}{2}+m$ يوازي المستقيم (D)ويقطع محورالتراتيب في النقطة $(0;m)$. من التمثيل البياني للمنحني (c)نلاحظ أنه إذا كان :

$m\in]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$ فإن : $(D_m)\cap(c)=\varnothing$ والمعادلة $f(x)=\frac{x}{2}+m$ ليست لها حلول . إذا كان $m\in]1;3[$ ، المستقيم (D_m) يقطع (c)في نقطة وحيدة فإن المعادلة $f(x)=\frac{x}{2}+m$ تقبل حلا وحيدا .

8- أ) تعيين على المجال $]0;+\infty[$: $\int x\ln(x+2)dx$, $\int x\ln x\,dx$

$\int x\ln x\,dx$ ، بوضع $u'(x)=x$ ومنه $u(x)=\frac{x^2}{2}$ و $v(x)=\ln x$ ومنه $v'(x)=\frac{1}{x}$.

$$\int x\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+c$$

$\int x\ln(x+2)dx$ ، بوضع $u'(x)=x$ ومنه $u(x)=\frac{x^2}{2}$

و $v(x)=\ln(x+2)$ ومنه $v'(x)=\frac{1}{x+2}$.

$$\int x\ln(x+2)dx=\frac{x^2}{2}\ln(x+2)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x+2}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln(x+2)-\frac{1}{2}\int\left(x-2+\frac{4}{x+2}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln(x+2)-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-2x+4\ln(x+2)\right]+c$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-2\right)\ln(x+2)-\frac{x^2}{4}+x+c$$

ب) حساب المساحة $S(\alpha)$

$$S(\alpha)=\int_1^\alpha[f(x)-x]dx=\int_1^\alpha\left[x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)-\frac{x}{2}+1\right]dx=$$

$$=\int_1^\alpha\left[x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)-\frac{x}{2}+1\right]dx=\int_1^\alpha\left[x\ln(x+2)-x\ln x-\frac{x}{2}+1\right]dx$$

$$=\int_1^\alpha x\ln(x+2)dx-\int_1^\alpha x\ln x\,dx-\int_1^\alpha\frac{x}{2}dx+\int_1^\alpha dx=$$

$$=\left[\left(\frac{x^2}{2}-2\right)\ln(x+2)-\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+2x\right]_1^{\alpha}=$$

$$=\left(\frac{\alpha^2}{2}-2\right)\ln(\alpha+2)-\frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha-\frac{\alpha^2}{4}+2\alpha+\frac{3}{2}\ln 3-\frac{7}{4}(u.a)$$

مسألة 5

I. لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x+(x-2)\ln x$

1- أ) أحسب $g'(x)$ وبين أن إشارتها هي إشارة $h(x)=2x-2+x\ln x$.

ب) أدرس تغيرات الدالة h واحسب $h(1)$ ثم استنتج إشارة $h(x)$

2) أدرس تغيرات الدالة g واستنتج أن: $g(x)\geq 1$ من أجل كل $x\in]0;+\infty[$

II. لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=1+x\ln x-(\ln x)^2$

1) أدرس تغيرات الدالة f. نرمز بـ (c) لمنحني الدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(0;\vec{i};\vec{j})$ (طول الوحدة $2cm$).

2- أ) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (c) عند النقطة ذات الفاصلة $x=1$.

ب) أدرس تغيرات الدالة p المعرفة بـ : $p(x)=x-1-\ln x$ ثم استنتج إشارة $p(x)$. جـ) استنتج وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المماس (Δ)

3) أنشئ المنحني (c).

4- أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب : $\beta=\int_1^e(\ln x)^2\,dx$, $\alpha=\int_1^e x\ln x\,dx$

ب) أحسب المساحة المحددة بالمنحني (c) والمستقيمات التي معادلاتها :

$x=1$, $x=e$, $y=0$

الحل

I. 1) حساب $g'(x)$

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما

$$g'(x)=1+\ln x+\frac{x-2}{x}=\frac{x+x\ln x+x-2}{x}=\frac{2x-2+x\ln x}{x}$$

على المجال $]0;+\infty[$ إشارة $g'(x)$ هي إشارة $h(x)=2x-2+x\ln x$

ب) دراسة تغيرات الدالة h

مجموعة تعريف : $D_h=]0;+\infty[$

حساب النهايات : $\lim_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$, $\lim_{x\to 0} h(x)=-2$

حساب المشتق ودراسة إشارته : من أجل كل $x\in D_h$ لدينا : $h'(x)=3+\ln x$

$h'(x)=0$ ومنه $3+\ln x=0$ و منه $\ln x=-3$ ومنه $x=e^{-3}$

$h'(x)<0$ من أجل كل $x\in]0;e^{-3}[$ و $h'(x)>0$ من أجل كل $x\in]e^{-3};+\infty[$

جدول تغيرات الدالة h :

x	0		e^{-3}		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	-2	↘	$f(e^{-3})$	↗	$+\infty$

$h(1)=0$, $h(e^{-3})=-2-e^{-3}$. من جدول تغيرات الدالة h نستنتج ما يلي:

$h(x)<0$ من أجل كل $x\in]0;1[$ و $h(x)>0$ من أجل كل $x\in]1;+\infty[$

وبما أن إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $h(x)$ فان :

$g'(x)<0$ من أجل كل $x\in]0;1[$ و $g'(x)>0$ من أجل كل $x\in]1;+\infty[$

2) دراسة تغيرات الدالة g

مجموعة تعريف : $D_g=]0;+\infty[$

حساب النهايات :

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, $\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\left[x+(x-2)\ln x\right]=+\infty$

جدول تغيرات الدالة g

x	0 1 $+\infty$
$g'(x)$	$-$ 0 $+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘ 1 ↗ $+\infty$

من جدول تغيرات الدالة g نستنتج أن : $g(x) \geq 1$ من أجل كل عدد $x \in]0;+\infty[$

II. 1) دراسة تغيرات الدالة f

مجموعة تعريف : $D_f =]0;+\infty[$

حساب النهايات :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left[1 + x\ln x - (\ln x)^2\right] = \lim_{x \to +\infty} x\ln x\left[\frac{1}{x\ln x} + 1 - \frac{\ln x}{x}\right]$$

نعلم أن : $\lim_{x \to +\infty} x\ln x = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty}\frac{1}{x\ln x} = 0$, $\lim_{x \to +\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$ ،

إذن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$

حساب المشتق ودراسة إشارته : من أجل كل $x \in D_f$:

$$f'(x) = 1 + \ln x - 2 \times \frac{\ln x}{x} = \frac{x + x\ln x - 2\ln x}{x} = \frac{x + (x-2)\ln x}{x} = \frac{g(x)}{x}$$

نعلم أن من أجل كل $x \in D_f$: $g(x) > 0$ و $x > 0$ ، إذن $f'(x) > 0$

جدول تغيرات الدالة f

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	‖ $+$
$f(x)$	‖ $-\infty$ ↗ $+\infty$

2- أ) معادلة المماس (Δ) للمنحني (c) عند النقطة ذات الفاصلة $x=1$.

معادلة المماس (Δ) هي : $y=f'(1)(x-1)+f(1)=(x-1)+1=x$

ب) دراسة تغيرات الدالة p

مجموعة تعريف : $D_p=]0;+\infty[$

$$\lim_{x\to 0} p(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} p(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$$

حساب المشتق ودراسة إشارته : من أجل كل $x\in D_p$: $p'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$

$p'(x)<0$ من أجل $x\in]0;1[$ و $p'(x)>0$ لما $x>1$

جدول تغيرات الدالة p :

x	0		1		$+\infty$
$P'(x)$		$-$	0	$+$	
$P(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

من جدول تغيرات الدالة p نستنتج أن $p(x)>0$ من أجل كل $x\in D_p$.

ج) وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المماس (Δ)

$$f(x)-x=1+x\ln x-(\ln x)^2-x=1-(\ln x)^2-x(1-\ln x)=$$
$$=(1-\ln x)[1+\ln x-x]=(\ln x-1)\,p(x)$$

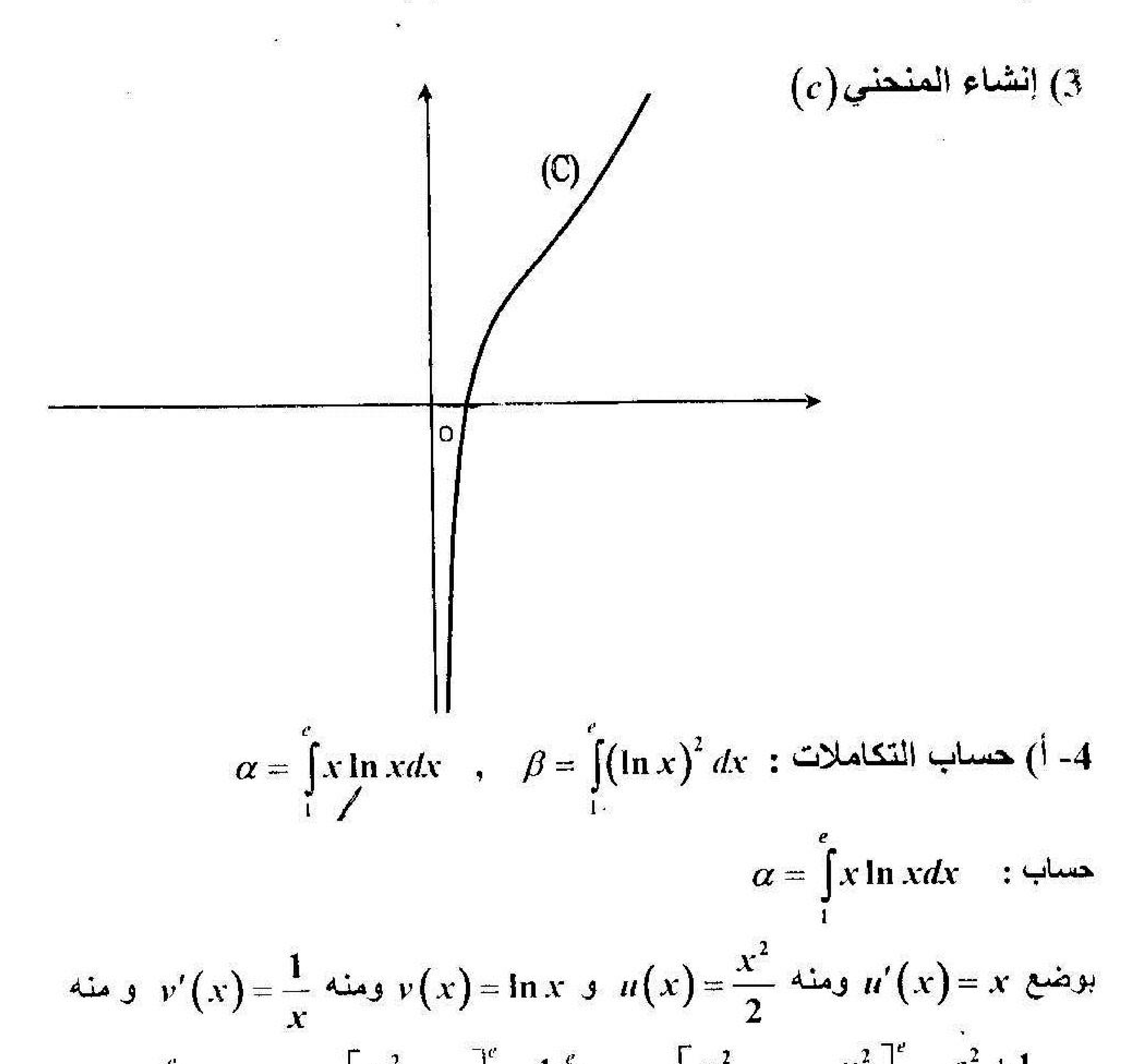
$f(x)-x=(\ln x-1)\,p(x)=0$ ومنه $\ln x-1=0$ أو $p(x)=0$ ومنه

$x=e$ أو $x=1$. المستقيم (Δ) والمنحني (c) يتقاطعان في نقطتين.

$f(x)-x>0$ لما $(\ln x-1)>0$ ومنه $\ln x>1$ و منه $x\in]e;+\infty[$ ، على هذا المجال المنحني (c) فوق المستقيم (Δ).

$f(x)-x<0$ من أجل كل $x\in]0;e[$ ، في هذا المجال المنحني (c) تحت (Δ)

3) إنشاء المنحني (c)



4- أ) حساب التكاملات : $\alpha=\int_1^e x\ln x dx \quad , \quad \beta=\int_1^e (\ln x)^2 dx$

حساب : $\alpha=\int_1^e x\ln x dx$

بوضع $u'(x)=x$ ومنه $u(x)=\frac{x^2}{2}$ و $v(x)=\ln x$ ومنه $v'(x)=\frac{1}{x}$ و منه

$$\alpha=\int_1^e x\ln x dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e x dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}\right]_1^e=\frac{e^2+1}{4}$$

حساب : $\beta=\int_1^e (\ln x)^2 dx$.

بوضع $u'(x)=1$ ومنه $u(x)=x$ و $v(x)=(\ln x)^2$ ومنه $v'(x)=\frac{2\ln x}{x}$.

$$\beta=\int_1^e (\ln x)^2 dx=\left[x(\ln x)^2\right]_1^e-2\int_1^e \ln x dx=$$

$$=\left[x(\ln x)^2-2(x\ln x-x)\right]_1^e=\left[x(\ln x)^2-2x\ln x+2x\right]_1^e=e-2$$

ب) حساب المساحة المحددة بالمنحني (c) والمستقيمات التي معادلاتها :

$x = 1\ ,\ x = e\ \ ,y = 0$

$$S = \int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e \left[1 + x\ln x - (\ln x)^2\right]dx =$$

$$= \int_1^e dx + \int_1^e x\ln x\,dx - \int_1^e (\ln x)^2\,dx = [x]_1^e + \frac{e^2+1}{4} - e + 2$$

$$= \frac{e^2+1}{4} + 1\ (u.a) = 4\left(\frac{e^2+1}{4} + 1\right) = \left(e^2+5\right)cm^2$$

$$(\ u.a = 2cm \times 2cm = 4cm^2\ \ )$$

مسألة 6

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بـ: $f(x) = x + 4 + \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$. نسمي (c) المنحني البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(0;\vec{i};\vec{j})$. 1) أدرس تغيرات الدالة f

2) برهن بأن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x + 4$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c).

3) أدرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى (Δ).

4- أ) برهن بأن نقطة تقاطع المنحني (c) مع محور الترتيب هي مركز تناظرالمنحني (c).

ب) أنشئ المنحني (c) . 5) m وسيط حقيقي ، ناقش تبعا لقيم m عدد نقاط تقاطع المنحني (c) مع المستقيم (D_m) ذي المعادلة $y = x + m$

6) باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب المساحة المحددة بالمنحني (c) والمستقيمات التي معادلاتها : $y = x + 4\ ,\ x = 6\ ,\ x = 3$

7) أنشئ في نفس المعلم منحني الدالة g المعرفة بـ :

$$g(x) = x + 4 + \ln(x-2) - \ln(x+2)$$

الحل

1) دراسة تغيرات الدالة f

مجموعة تعريف : تكون الدالة f معرفة إذا كان $x - 2 \neq 0$ و $x + 2 \neq 0$ أي : $x \neq -2$ و $x \neq 2$ إذن : $D_f =]-\infty;-2[\cup]-2;2[\cup]2;+\infty[$

حساب النهايات :

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ (لأن $\lim_{|x|\to+\infty}\ln\frac{x-2}{x+2}=\ln 1=0$)

. $\lim_{x\to 2} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to -2} f(x)=+\infty$

حساب المشتق ودراسة إشارته : من أجل كل $x\in D_f$ لدينا :

$$f'(x)=\left[x+4+\ln|x-2|-\ln|x+2|\right]'=1+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}=$$

$$=\frac{(x^2-4)+(x+2)-(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{x^2}{(x+2)(x-2)}$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(x+2)(x-2)$

$f'(x)<0$ من أجل كل $x\in]-2;2[$

$f'(x)>0$ من أجل $x\in]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$ -2	-2 2	2 $+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

2)البرهان بأن المستقيم (Δ) هو مستقيم مقارب للمنحني (c)

$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-(x+4)\right]=\lim_{|x|\to+\infty}\ln\frac{x-2}{x+2}=0$ ، إذن المستقيم (Δ)ذي المعادلة $y=x+4$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c)في جوار $(-\infty)$وفي جوار $(+\infty)$

3)دراسة وضعية المنحني (c)بالنسبة إلى (Δ)

$f(x)-(x+4)=\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|$.

وضعية (c) بالنسبة إلى (Δ) تتعلق بـ $\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|$

$\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|<0$ و منه $\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|<1$ و منه $-1<\dfrac{x-2}{x+2}<1$ و منه

$\dfrac{x-2}{x+2}<1$) و $-1<\dfrac{x-2}{x+2}$) ومنه ($\dfrac{-4}{x+2}<0$ و $\dfrac{2x}{x+2}>0$ ومنه

($x\in\,]-2;+\infty[$ و $x\in\,]-\infty;-2[\,\cup\,]0;+\infty[$) ومنه $x\in\,]0;+\infty[$.

من أجل كل $x\in\,]0;+\infty[$ لدينا $f(x)-(x+4)<0$ ويكون المنحني (c) تحت (Δ)

$\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|>0$ ومنه $\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|>1$ ومنه ($\dfrac{x-2}{x+2}>1$ أو $\dfrac{x-2}{x+2}<-1$) ومنه

($\dfrac{-4}{x+2}>0$ أو $\dfrac{2x}{x+2}<0$) ومنه ($x\in\,]-\infty;-2[$ أو $x\in\,]-2;0[$) ومنه

$x\in\,]-\infty;-2[\,\cup\,]-2;0[$ ، على هذا المجال لدينا $f(x)-(x+4)>0$

ويكون المنحني (c) فوق المستقيم (Δ).

4- أ) البرهان بأن نقطة تقاطع المنحني (c) مع $(y'y)$ هي مركز تناظر (c)

المنحني (c) يقطع $(y'y)$ في النقطة $(0;4)$

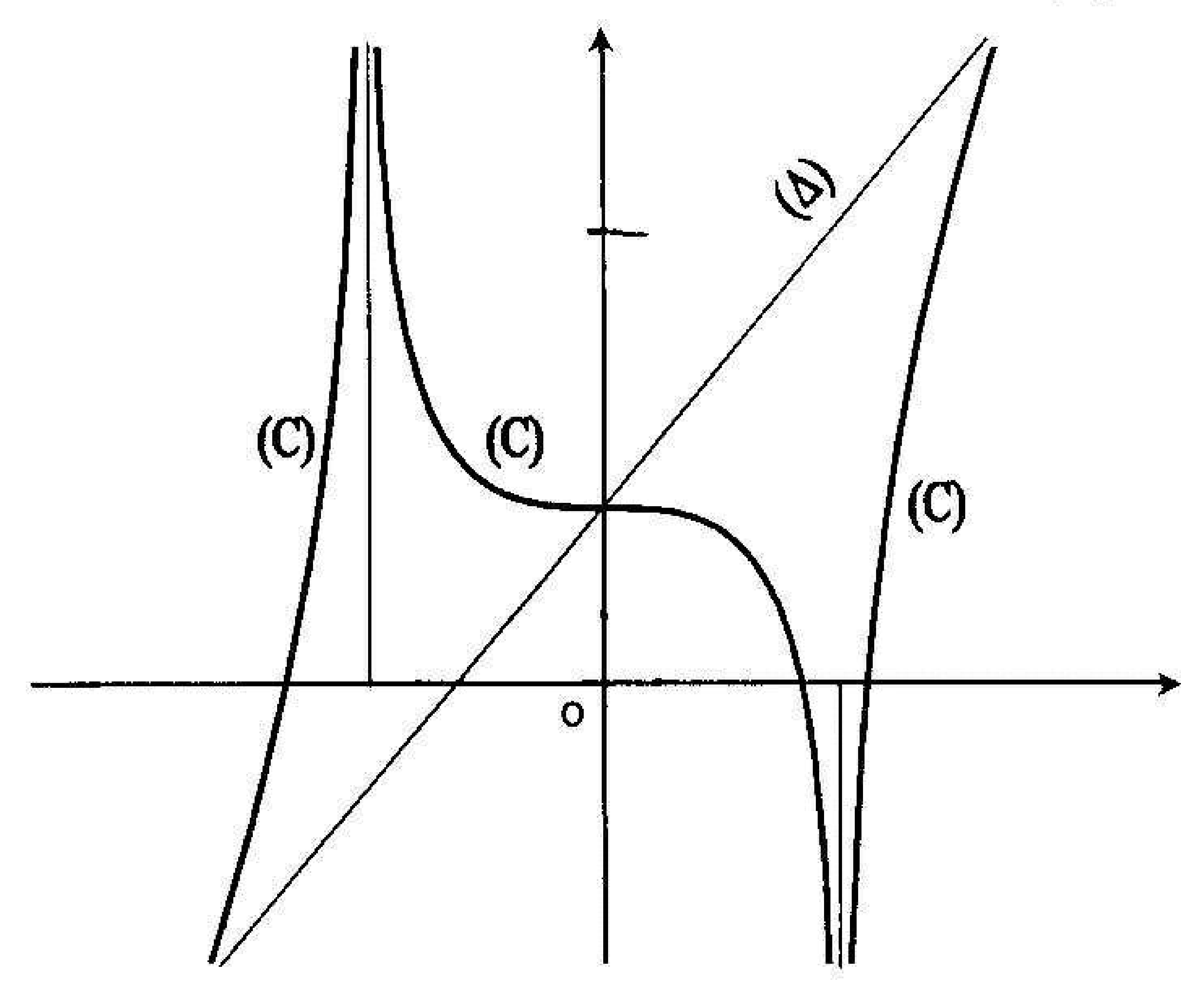
من أجل كل $x\in D_f$ و $-x\in D_f$ لدينا :

$$f(-x)+f(x)=8+\ln\left|\frac{-x-2}{-x+2}\right|+\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|=$$

$$=8+\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right|+\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|=8+\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\times\frac{x-2}{x+2}\right|=8+\ln 1=8$$

بما أن $f(-x)+f(x)=8$ فالنقطة $(0;4)$ هي مركز تناظر المنحني (c)

ب) إنشاء المنحنى (c)



5) مناقشة عدد نقاط تقاطع (c) مع المستقيم (D_m)

المستقيم (D_m) يوازي المستقيم المقارب المائل (Δ) ويقطع $(y'y)$ في النقطة $(0;m)$.

من التمثيل البياني للمنحني (c) نستنتج ما يلي :

$m \in]-\infty;4[\cup]4;+\infty[$ ، (D_m) يقطع المنحني (c) في نقطتين

$m = 4$

6) حساب المساحه المحددة بالمنحني (c) والمستقيمات التي معادلاتها

$x = 3 \quad , \quad x = 6 \quad , \quad y = x + 4$

$S = \int_3^6 \left[(x+4) - f(x) \right] dx = -\int_3^6 \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| dx$. نستعمل التكامل بالتجزئة لحساب S. بوضع $u'(x) = 1$ ومنه $u(x) = x$

و $v(x) = \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$ ومنه $v'(x) = \frac{4}{x^2 - 4}$

$$S=-\int_3^6 \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|dx=\left[-x\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right]_3^6+\int_3^6\frac{4x}{x^2-4}dx=$$

$$=\left[-x\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right]_3^6+2\int_3^6\frac{2x}{x^2-4}dx=\left[-x\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+2\ln\left|x^2-4\right|\right]_3^6=$$

$$=\left(-6\ln\frac{1}{2}+2\ln 32\right)-\left(-3\ln\frac{1}{5}+2\ln 5\right)=6\ln 2+2\ln 2^5-3\ln 5-2\ln 5$$

$$=6\ln 2+10\ln 2-5\ln 5=16\ln 2-5\ln 5\ \ (u.a)$$

إنشاء منحني الدالة g

الدالة g معرفة على المجال $]2;+\infty[$. من أجل كل $x\in\,]2;+\infty[$ لدينا $f(x)=x+4+\ln(x-2)-\ln(x+2)=g(x)$ ، إذن منحني الدالة g هو منطبق على المنحني (c) في المجال $]2;+\infty[$.

<u>مسألة 7</u>

لتكن الدالة العددية f المعرفة بـ : $f(x)=\dfrac{x^2-x+\ln(x-1)}{(x-1)^2}$ وليكن (c) المنحني البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $(0;\vec{i};\vec{j})$.

نعتبر الدالة g المعرفة بـ : $g(x)=2-x-\ln(x-1)$.

1- أ) أدرس تغيرات الدالة g . ب) أحسب $g(2)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$.

2) أدرس تغيرات الدالة g.

3- أ) برهن بأن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد $x_0\in\,]1;2[$.

ب) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c) . 4) أنشئ المنحني (c).

5- أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة عين دالة أصلية للدالة : $x\to\dfrac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}$

ب) أثبت أن من أجل كل $x\in D_f$: $f(x)=\alpha+\dfrac{\beta}{x-1}+\delta\dfrac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}$ حيث α , β , δ أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

جـ) أحسب $S(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (c) والمستقيمات التي

معادلاتها : $y=1$, $x=\lambda$, $x=2$ حيث λ عدد حقيقي أكبر من 2.

د) أحسب $\lim_{x\to+\infty} S(\lambda)$

الحـل

1- أ) دراسة تغيرات الدالة g

<u>مجموعة تعريف</u> : تكون الدالة g معرفة إذا كان $x-1>0$ ، إذن $D_g =]1;+\infty[$

<u>حساب النهايات</u> : $\lim_{x \xrightarrow{>} 1} g(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (x-1)\left(\frac{2-x}{x-1} - 2\frac{\ln(x-1)}{x-1}\right) = -\infty$$

(لأن $\lim_{x\to+\infty} \frac{2-x}{x-1} = -1$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x-1)}{x-1} = 0$)

<u>حساب المشتق ودراسة إشارته</u> : من أجل كل $x \in D_g$: $g'(x) = -1 - \frac{2}{x-1} < 0$

<u>جدول تغيرات الدالة</u> g

x	1	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$
$g(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$ $-\infty$

ب) حساب $g(2)$ واستنتاج إشارة $g(x)$

$g(2)=0$ ، من جدول تغيرات الدالة g نستنتج ما يلي :

$g(x)>0$ من أجل $x \in]1;2[$ و $g(x)<0$ من أجل $x \in]2;+\infty[$

2) دراسة تغيرات الدالة f

<u>مجموعة تعريف</u> : $D_f =]1;+\infty[$

<u>حساب النهايات</u> : $\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = -\infty$ (لأن $\lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2} = -\infty$)

على المجال $]1;2[$ الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما .

لدينا : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = -\infty$ و $f(2) = 2$. العدد0 ينتمي إلى المجال $]-\infty;2[$ ،

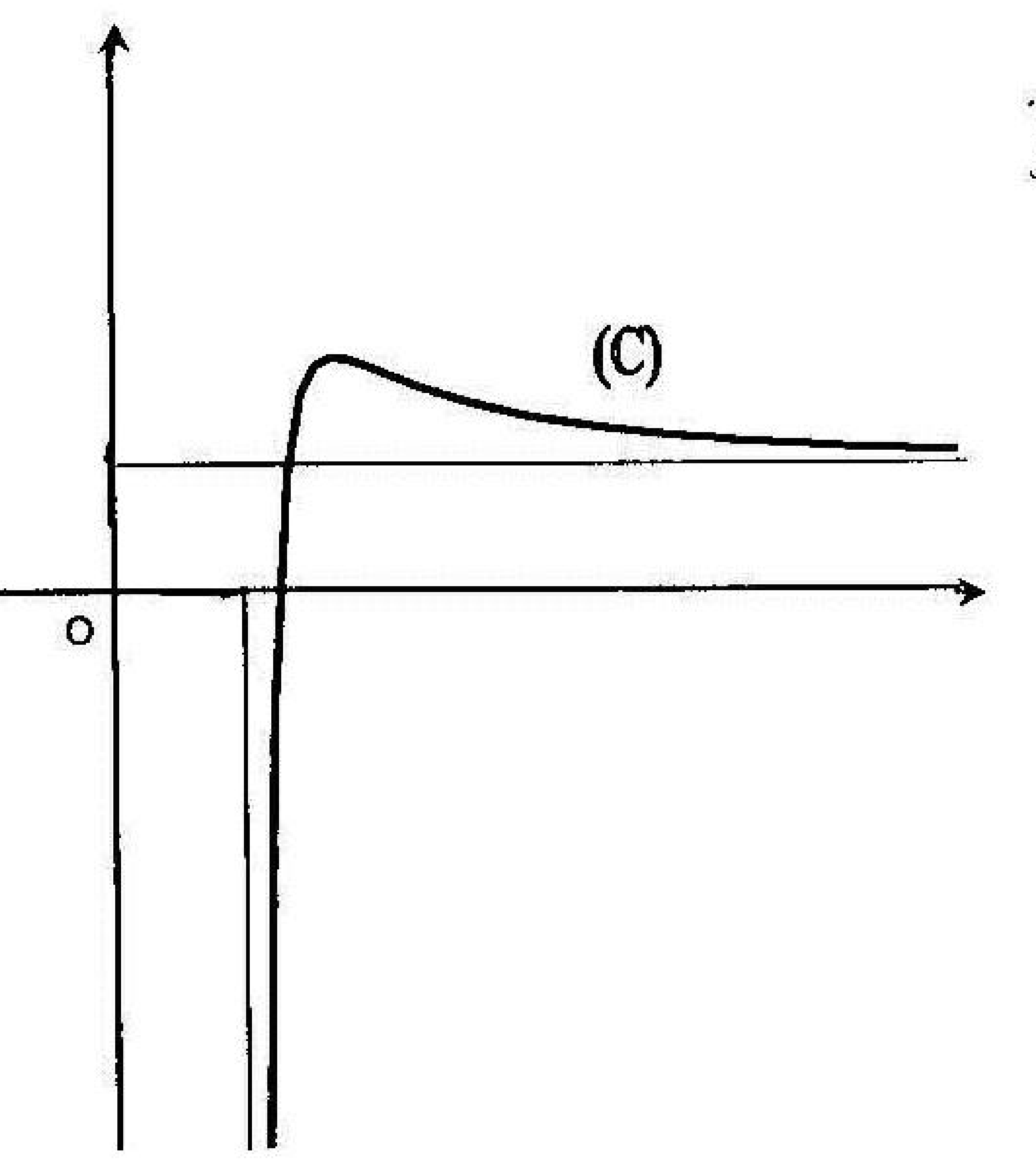
حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد $x_0 \in]1;2[$.

ب) دراسة الفروع اللانهائية للمنحني (c)

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = -\infty$ ، فالمستقيم ذي المعادلة $x = 1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c)

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ ، فالمستقيم ذي المعادلة $y = 1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c) في جوار $(+\infty)$.

4) إنشاء المنحني (c)



5- أ) تعيين دالة أصلية للدالة : $x \to \dfrac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}$

نستعمل المكاملة بالتجزئة لحساب $\int \dfrac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}dx$ ، بوضع $u'(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

ومنه $u(x) = -\dfrac{1}{x-1}$ و $v(x) = \ln(x-1)$ ومنه $v'(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

على المجال $]1;2[$ الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما .

لدينا : $\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = -\infty$ و $f(2) = 2$. العدد 0 ينتمي إلى المجال $]-\infty;2]$ ،

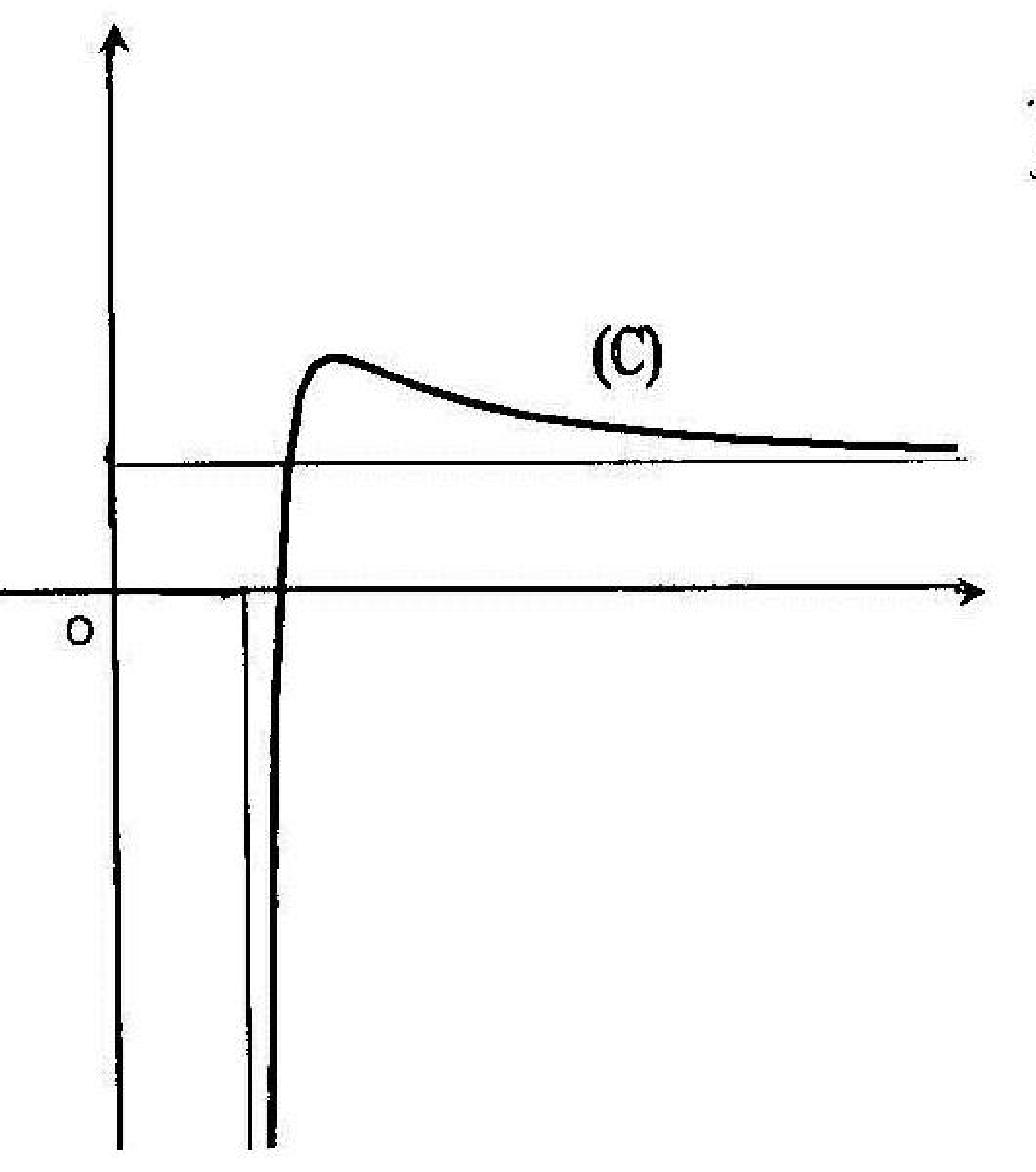
حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد $x_0 \in]1;2[$.

ب) دراسة الفروع اللانهائية للمنحني (c)

$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = -\infty$ ، فالمستقيم ذي المعادلة $x = 1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c)

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ ، فالمستقيم ذي المعادلة $y = 1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c) في جوار $(+\infty)$.

4) إنشاء المنحني (c)



5- أ) تعيين دالة أصلية للدالة : $x \to \dfrac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}$

نستعمل المكاملة بالتجزئة لحساب $\int \dfrac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}dx$ ، بوضع $u'(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

ومنه $u(x) = -\dfrac{1}{x-1}$ و $v(x) = \ln(x-1)$ ومنه $v'(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

$$\int \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}dx = -\frac{1}{x-1}\times \ln(x-1) + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx =$$

$$= -\frac{1}{x-1}\times \ln(x-1) - \frac{1}{x-1} + c = -\frac{1}{x-1}\left[1+\ln(x-1)\right] + c$$

ب) إثبات أن من أجل $x \in D_f$: $f(x) = \alpha + \frac{\beta}{x-1} + \delta \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}$

$$f(x) = \frac{x^2 - x + \ln(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 + x - 1 + \ln(x-1)}{(x-1)^2} =$$

$$= 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}$$

إذن $\alpha = \beta = \delta = 1$. يمكن استعمال طريقة المطابقة لإيجاد الأعداد α, β, δ.

جـ) حساب المساحة $S(\lambda)$

$$S(\lambda) = \int_2^{\lambda}\left[f(x) - 1\right]dx = \int_2^{\lambda}\frac{1}{x-1}dx + \int_2^{\lambda}\frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}dx =$$

$$= \left[\ln(x-1) - \frac{1}{x-1}\times\left(1+\ln(x-1)\right)\right]_2^{\lambda} =$$

$$= \ln(\lambda-1) - \frac{1+\ln(\lambda-1)}{\lambda-1} + 1 \quad (u.a)$$

د) حساب $\lim_{\lambda\to+\infty} S(\lambda)$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} S(\lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty}\left[\ln(\lambda-1) - \frac{1}{\lambda-1} - \frac{\ln(\lambda-1)}{\lambda-1} + 1\right] = +\infty$$

(لأن $\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\ln(\lambda-1)}{\lambda-1} = 0$ و $\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\lambda-1} = 0$ و $\lim_{\lambda\to+\infty}\ln(\lambda-1) = +\infty$)

مسألة 8

I. لتكن الدالة العددية g المعرفة بـ : $g(x) = x^2 + 2x + \ln|x+1|$.

1) أحسب $g(-2)$, $g(0)$. 2) أدرس تغيرات الدالة g

3) استنتج إشارة $g(x)$.

II. نعتبر الدالة f المعرفة بـ : $f(x)=x+1-\frac{\ln|x+1|}{x+1}$ وليكن (c) المنحني البياني لها في معلم متعامد ومتجانس .

1- أ) أثبت ان من أجل كل $x\in D_f$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$. ب) ادرس تغيرات الدالة f

2- أ) برهن أن المنحني (c) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) يطلب تعيينه.

ب) أدرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم (D) . 3) أنشئ المنحني (c).

4) أثبت أن من أجل كل $x\in D_f$ فإن $f(-x)+f(x)=0$. ماذا نستنتج ؟

5- ا) أثبت أنه توجد نقطتان من المنحني (c) يكون فيهما المماس موازيا للمستقيم (D).

ب) عين إحداثيات هاتين النقطتين واكتب معادلة المماسين للمنحني (c) عندهما .

6- أ) عين على المجال $]-1;+\infty[$ دالة أصلية للدالة : $x\to\frac{\ln|x+1|}{x+1}$

ب) استنتج على المجال $]-1;+\infty[$ دالة أصلية للدالة f .

جـ) أحسب مساحة الحيز المستوي المحددة بالمنحني (c) والمستقيمين $x=0$ و $x=1$

الحـــل

I. 1) حساب $g(-2)$, $g(0)$

$g(-2)=0 \quad , \quad g(0)=0$

2) دراسة تغيرات الدالة g

مجموعة تعريف : $D_g=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

حساب النهايات : $\lim\limits_{x\to -1} g(x)=-\infty \quad , \quad \lim\limits_{|x|\to +\infty} g(x)=+\infty$

حساب المشتق ودراسة إشارته : من أجل كل $x\in D_g$ فإن :

$$g'(x)=2x+2+\frac{1}{x+1}=\frac{(2x+2)(x+1)+1}{x+1}=\frac{2(x+1)^2+1}{x+1}$$

من أجل $x\in D_g$: $2(x+1)^2+1>0$ ، إذن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x+1$

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	‖	$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗ $+\infty$

3) إشارة $g(x)$

من جدول تغيرات الدالة g نستنتج ما يلي :

$g(x) > 0$ من أجل $x \in]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[$

$g(x) < 0$ من أجل $x \in]-2;-1[\cup]-1;0[$

.II -1 أ) إثبات أن من أجل $x \in D_f$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$

$$x \in D_f \ ; \ f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x+1} \times (x+1) - \ln|x+1|}{(x+1)^2} = 1 - \frac{1 - \ln|x+1|}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x+1)^2 - 1 + \ln|x+1|}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + \ln|x+1|}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

ب) دراسة تغيرات الدالة f :

مجموعة تعريف : $D_f =]-\infty \ ; -1[\cup]-1;+\infty[$

حساب النهايات :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} f(x) = -\infty$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	-2		-1		0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	‖	−	0	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

2- ا) البرهان بأن المنحني (c) يقبل مستقيم مقارب مائل (D)

$\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=-\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{\ln|x+1|}{x+1}=0$ ، إذن المستقيم (D) ذي المعادلة $y=x+1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c) في جوار $(-\infty)$ وفي جوار $(+\infty)$

ب) دراسة وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم (D)

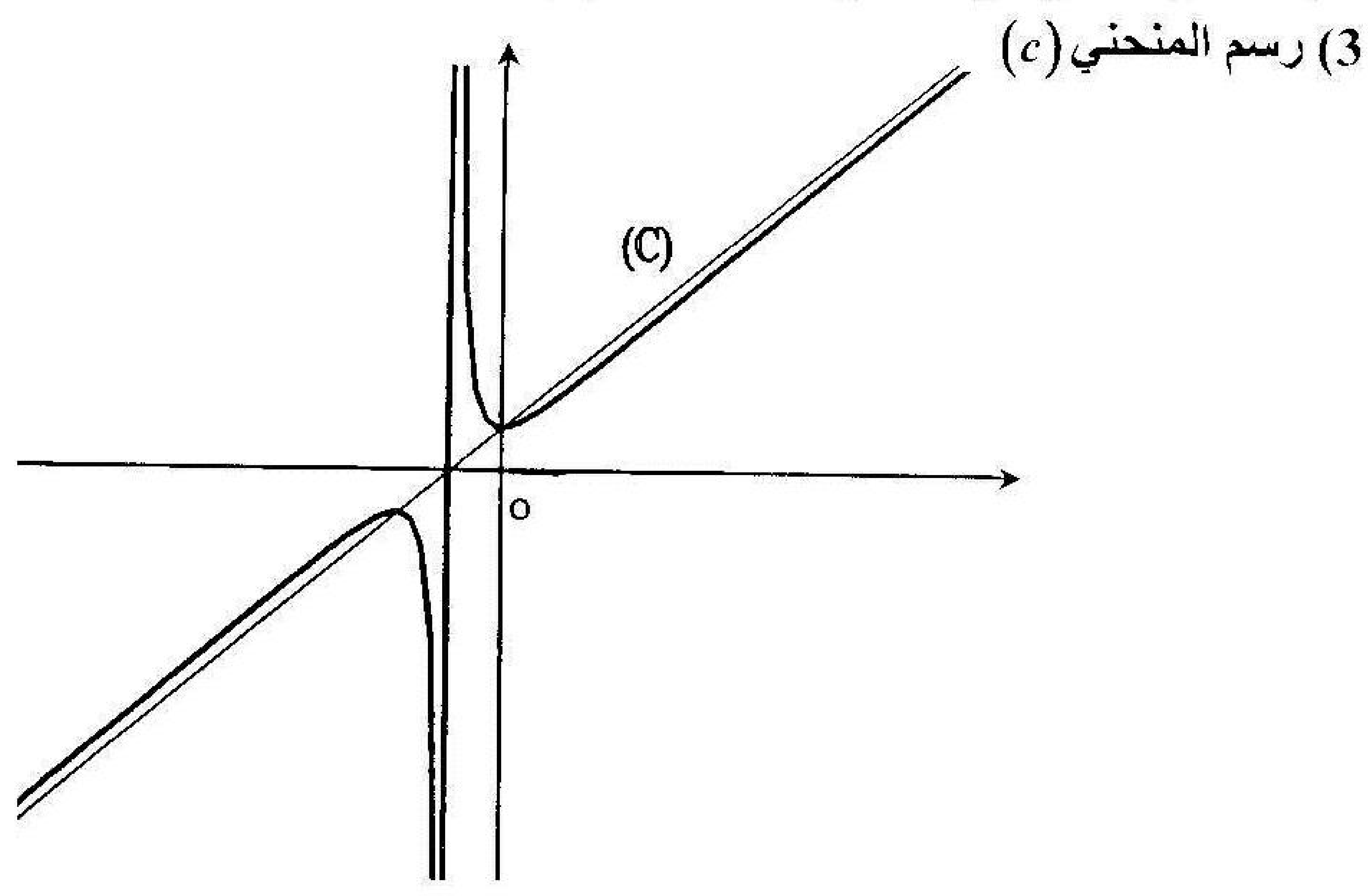
$f(x)-(x+1)=-\dfrac{\ln|x+1|}{x+1}$ ، وضعية (c) بالنسبة إلى (D) تتعلق بإشارة الكسر $-\dfrac{\ln|x+1|}{x+1}$. المستقيم (D) يقطع المنحني (c) إذ اكا نت المعادلة $-\dfrac{\ln|x+1|}{x+1}=0$ لهاحلول ، ومنه $\ln|x+1|=0$ ومنه $|x+1|=1$ أي $x=0$ أو $x=-2$ ، إذن المستقيم (D) يقطع المنحني (c) في نقطتين $x=0$ و $x=-2$.

x	$-\infty$	-2		-1		0	$+\infty$
$\ln\|x+1\|$	+	0	−	‖	−	0	+
$x+1$	−		−	0	+		+
$-\dfrac{\ln\|x+1\|}{x+1}$	+	0	−	‖	+	0	−

المنحني (c) يكون فوق المستقيم (D) في المجال $]-\infty;-2[\cup]-1;0[$

وفي المجال $]-2;-1[\cup]0;+\infty[$ يكون المنحني (c) تحت المستقيم (D).

3) رسم المنحني (c)



4) إثبات أن من أجل $x\in D_f$: $f(-2-x)+f(x)=0$

إذا كان $x\in D_f$ فإن $(-2-x)\in D_f$ ومنه :

$$f(-2-x)+f(x)=\frac{\ln|-(x+1)|}{(x+1)}-\frac{\ln|x+1|}{x+1}=0$$

(لأن من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ فإن : $|(x+1)|=|-(x+1)|$)

نستنتج أن النقطة $(-1;0)$ هي مركز تناظر المنحني (c)

5-أ) إثبات وجود نقطتان من (c) يكون المماس عندهما يوازي (D)

المماس للمنحني (c) عند النقطة التي فاصلتها x يوازي (D) يعني :

معامل التوجيه $(D)=f'(x)$ ومنه $f'(x)=1$ ومنه : $\frac{x^2+2x+\ln|x+1|}{(x+1)^2}=1$

ومنه $x^2+2x+\ln|x+1|=(x+1)^2$ ومنه $\ln|x+1|=1$

ومنه $|x+1|=e$ أي : $x+1=e$ أو $x+1=-e$ ومنه $x=-1+e$ أو $x=-1-e$

إذن توجد نقطتان $\left(-1+e;e-\frac{1}{e}\right)$, $\left(-1-e;-e+\frac{1}{e}\right)$ من المنحني (c) يكون عندهما المماس للمنحني (c) موازيا المستقيم (D).

ب) معادلة المماسين للمنحني (c)

$$(\Delta_1):\ y=f'(-1-e)(x+1+e)+f(-1-e)=x+1+\frac{1}{e}$$

$$(\Delta_2):\ y=f'(-1+e)(x+1-e)+f(-1+e)=x+1-\frac{1}{e}$$

6- أ) تعيين على المجال $]-1;+\infty[$ دالة أصلية للدالة : $x\to\frac{\ln|x+1|}{x+1}$

$$\int\frac{\ln|x+1|}{x+1}dx=\int\frac{1}{x+1}\times\ln|x+1|dx=\frac{1}{2}\left[\ln(x+1)\right]^2+c$$

(لأن لدينا الشكل $\int u'(x)\times u(x)dx=\frac{1}{2}\left[u(x)\right]^2+c$)

ب) استنتاج على المجال $]-1;+\infty[$ دالة أصلية للدالة f

$$\int f(x)dx=\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{2}\left[\ln(x+1)\right]^2+c$$

ج) حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (c) والمستقيمات التي معادلاتها : $y=x+1$, $x=1$, $x=0$

$$S=\int_0^1\left[(x+1)-f(x)\right]dx=\int_0^1\frac{\ln|x+1|}{x+1}dx=\frac{1}{2}\left[\ln(x+1)\right]_0^1=\frac{1}{2}(\ln 2)^2$$

مسألة 9

نعتبر الدالة العددية g المعرفة بـ : $g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}+1$

1) أدرس تغيرات الدالة g ثم استنتج إشارة $g(x)$

2) لتكن الدالة العددية f المعرفة كما يلي :

$x \neq 0$, $f(x) = x\left[1+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$ و $f(0)=0$ وليكن (c) المنحني البياني

لها في معلم متعامد ومتجانس $(0;\vec{i};\vec{j})$. أ) هل الدالة f مستمرة على يمين $x=0$ ؟

ب) أدرس قابلية الإشتقاق f على يمين $x=0$ وفسر هندسيا النتيجة .

3) أدرس تغيرات الدالة f .

4- أ) أحسب $f(-3)$, $f\left(-\frac{3}{2}\right)$, $f(-2)$

ب) برهن بأن المنحني (c) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة $x_0 \in]-2;-3/2[$

جـ) برهن أن $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=0$ (ضع $x=\frac{1}{h}$ للوصول إلى نهاية شهيرة)

د) استنتج معادلة المستقيم المقارب المائل (D) للمنحني (c).

5) أنشئ المنحني (c). 6) α عدد حقيقي حيث : $0<\alpha\leq 1$

أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب : $\int_{\alpha}^{1} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$

ب) أحسب المساحة المحصورة بين المنحني (c) والمستقيمات $x=1$, $x=\alpha$, (D)

الحل

1) دراسة تغيرات الدالة g واستنتاج إشارة $g(x)$

مجموعة تعريف : تكون الدالة g إذا كان $\left(1+\frac{1}{x}\right)>0$ و $x\neq 0$ ومنه

$\frac{x+1}{x}>0$ ومنه $x(x+1)>0$ ومنه : $D_g =]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$

حساب النهايات: $\lim\limits_{|x|\to+\infty} g(x)=1$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=+\infty$

$$\lim_{x \to -1} g(x) = \lim_{x \to -1}\left[\ln\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1} + 1\right] =$$

$$= \lim_{x \to -1}\left[\ln|x+1| - \ln|x| - \frac{1}{x+1} + 1\right] =$$

$$= \lim_{x \to -1}\left[\frac{(x+1)\ln|x+1| - 1}{x+1} - \ln|x| + 1\right] = +\infty$$

(لأن $\lim_{x \to -1}(x+1)\ln|x+1| = 0$ و $\lim_{x \to -1}\frac{-1}{x+1} = +\infty$)

حساب المشتق ودراسة إشارته : من أجل كل $x \in D_g$:

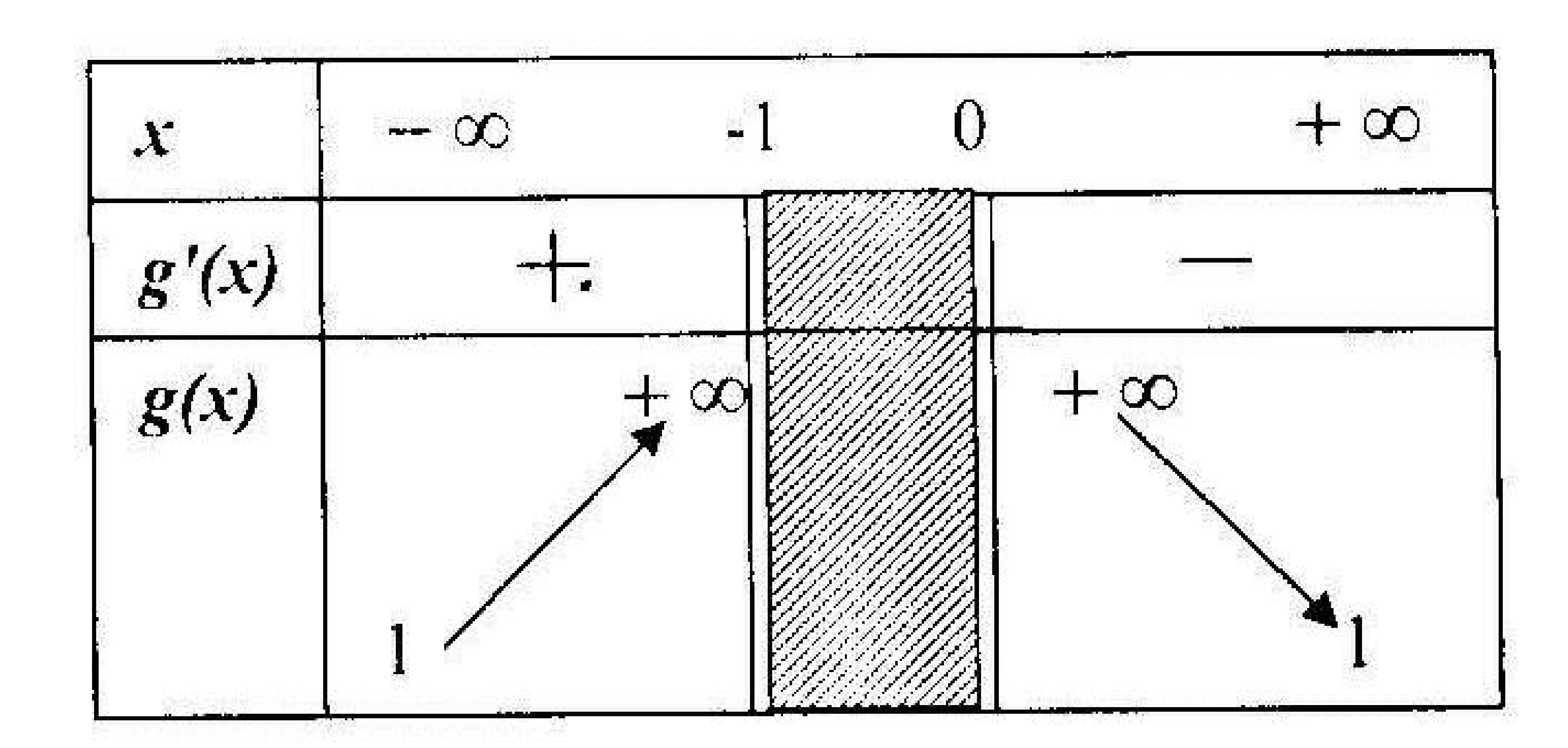
$$g'(x) = \left[\ln\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1} + 1\right]' = \left[\ln|x+1| - \ln|x| - \frac{1}{x+1} + 1\right]' =$$

$$= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+1) - (x+1)^2 + x}{x(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2}$$

إشارة $g'(x)$ هي إشارة $(-x)$

$g'(x) < 0$ من أجل كل $x \in]0;+\infty[$ ، $g'(x) > 0$ من أجل كل $x \in]-\infty;-1[$

جدول تغيرات الدالة g



x	$-\infty$ -1 0 $+\infty$
$g'(x)$	+ ‖ −
$g(x)$	$1 \nearrow +\infty$ ‖ $+\infty \searrow 1$

من جدول تغيرات الدالة g نستنتج أن $g(x) > 0$ من أجل كل $x \in D_g$

2- أ) دراسة استمرارية الدالة f على يمين $x = 0$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} x\left[1+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x \xrightarrow{>} 0}\left[x + x\ln\frac{x+1}{x}\right] =$$

$$= \lim_{x \xrightarrow{>} 0}\left[x + x\ln(x+1) - x\ln x\right] = 0 = f(0)$$

إذن الدالة f مستمرة على يمين $x = 0$

ب) قابلية الاشتقاق الدالة f على يمين $x = 0$ والتفسير الهندسي

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0}\left[1+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = +\infty$$

، فالدالة f غير قابلة الاشتقاق على يمين $x = 0$ ، والتفسير الهندسي لهذه النتيجة هو أن المنحني (c) على يمين 0 له نصف مماس يوازي محور التراتيب .

3) دراسة تغيرات الدالة f

<u>مجموعة تعريف</u> : $D_f =]-\infty;-1[\cup [0;+\infty[$

<u>حساب النهايات</u> :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \ , \ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ , \ \lim_{x \xrightarrow{<} -1} f(x) = +\infty$$

<u>حساب المشتق ودراسة إشارته</u> : من أجل كل $x \in D_f$:

$$f'(x) = 1+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\left(\frac{-1}{x(x+1)}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} + 1 = g(x)$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ ، إذن $f'(x) > 0$ من أجل كل $x \in D_f$

<u>جدول تغيرات الدالة</u> f :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	▒▒		+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$	▒▒	0	↗ $+\infty$

4- أ) حساب $f(-3)$, $f(-3/2)$, $f(-2)$

$$f(-2) = -2\left(1+\ln\frac{1}{2}\right) = -2(1-\ln 2) < 0$$

$f(-3/2) = 3/2(\ln 3 - 1) > 0 \quad , \quad f(-3) = -3(1 + \ln 2/3)$

ب) البرهان بأن المنحني (c) يقطع $(x'x)$ في نقطة وحيدة $x_0 \in]-2;-3/2[$

على المجال $[-2;-3/2]$ الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما والعدد 0 محصور بين $f(-2)$ و $f(-3/2)$، حسب مبرهنة القيم المتوسطة المنحني (c) يقطع $(x'x)$ في نقطة وحيدة $x_0 \in]-2;-3/2[$.

جـ) البرهان بأن $\lim_{|x| \to +\infty} [f(x) - (x+1)] = 0$

$\lim_{|x| \to +\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{|x| \to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1$.

بوضع $x = \frac{1}{h}$ ، لما $|x| \to +\infty$ فإن $h \to 0$ ومنه

$$\lim_{|x| \to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} - 1 = 1 - 1 = 0$$

د) استنتاج معادلة المستقيم المقارب (D) للمنحني (c)

بما أن $\lim_{|x| \to +\infty} [f(x) - (x+1)] = 0$ ، حسب التعريف فالمستقيم (D) ذو المعادلة $y = x + 1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c) في جوار $(-\infty)$ وفي جوار $(+\infty)$

5) رسم المنحني (c)

(C)

(C)

O

6- أ) حساب : $\int_{\alpha}^{1} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$

بوضع $u'(x)=x$ ومنه $u(x)=\frac{x^2}{2}$

و $v(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ ومنه $v'(x)=-\frac{1}{x(x+1)}$

$$\int_{\alpha}^{1} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]_{\alpha}^{1}+\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{1}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln(x+1)\right]_{\alpha}^{1}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\alpha^2}{2}\ln\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\ln(\alpha+1)$$

ب) حساب المساحة المحصورة بين (c) والمستقيمات التي معادلاتها :

$y=x+1\quad,\quad x=\alpha\quad,\quad x=1$

$$S=\int_{\alpha}^{1}\left[(x+1)-f(x)\right]dx=\int_{\alpha}^{1}\left[1-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]dx=$$

$$=\int_{\alpha}^{1}dx-\int_{\alpha}^{1}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx=[x]_{\alpha}^{1}-\frac{1}{2}+\frac{\alpha^2}{2}\ln\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\ln(\alpha+1)$$

$$=\frac{1}{2}\left[1-\alpha+\alpha^2\ln\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)-\ln(1+\alpha)\right]\ (u.a)$$

مسألة 10

I. f دالة عددية ذات المتغير الحقيقي x و معرفة بـ : $f(x)=x+1-2\ln(x+1)^2$

نسمي (c) المنحني البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(0;\vec{i};\vec{j})$.

1) أدرس تغيرات الدالة f والفروع اللانهائية للمنحني (c).

2) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $-2<\alpha<\frac{-3}{2}$

3) أدرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ ثم أرسم المنحني (c). 4- أ) أحسب $S(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحددة بالمنحني (c) والمستقيمات التي معادلاتها : $y = 0$, $x = \alpha$, $x = -2$

ب) أثبت أن : $S(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{2} - 3\alpha - 7$

II. ليكن T التحويل النقطي في المستوي (π) الذي يرفق بكل نقطة $M(x;y)$ النقطة $M'(x';y')$ حيث : $\begin{cases} x' = x - y - 1 \\ y' = x + y + 1 \end{cases}$

1) أكتب z' بدلالة z حيث z' و z هما لاحقتي النقطتين M و M' على الترتيب .

2) استنتج طبيعة التحويل T وعناصره المميزة .

3) عين معادلة (Γ) صورة المنحني (c) بالتحويل T

الحل

I. 1) دراسة تغيرات الدالة f والفروع اللانهائية للمنحني (c)

مجموعة تعريف : $D_f =]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

حساب النهايات : $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x+1-2\ln(x+1)^2\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[x+1-4\ln(x+1)\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}(x+1)\left[1-4\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right] = +\infty$$

حساب المشتق ودراسة إشارته: من أجل كل $x \in D_f$:

$f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x+1} = \dfrac{x-3}{x+1}$. $f'(x) = 0$ من أجل $x = 3$

$f'(x) > 0$ من أجل $x \in]-\infty;-1[\cup]3;+\infty[$ ، $f'(x) < 0$ من أجل $]-1;3[$

جدول تغيرات :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘	$f(3)$	↗	$+\infty$

دراسة الفروع اللانهائية للمنحني (c)

المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c)

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{|x|\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}-4\frac{\ln|x+1|}{x}\right)=$$

$$=\lim_{|x|\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}-4\frac{\ln|x+1|}{|x+1|}\times\frac{|x+1|}{x}\right)=1$$

$$\lim_{|x|\to+\infty}f(x)-x=\lim_{|x|\to+\infty}\left[1-2\ln(x+1)^2\right]=-\infty$$

إذن في جوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$ المنحني (c) له فرع قطع مكافئ في اتجاه المستقيم $y=x$

2) البرهان بأن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث : $-2<\alpha<-3/2$

على المجال $[-2;-3/2]$ الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما .

ولدينا $f(-2)=-1$ و $f(-3/2)=-\frac{1}{2}+2\ln 4\simeq 2,26$.

العدد 0 محصور بين $f(-2)$ و $f(-3/2)$ ، حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $-2<\alpha<-3/2$

3) دراسة وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$.

وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى (Δ) تتعلق بإشارة الفرق $f(x)-x$

$$f(x)-x=1-2\ln(x+1)^2=1-4\ln|x+1|.$$

$1-4\ln|x+1|>0$ ومنه $\ln|x+1|<\frac{1}{4}$ ومنه $|x+1|<e^{\frac{1}{4}}$ ومنه

$-e^{\frac{1}{4}} < x+1 < e^{\frac{1}{4}}$ ومنه $x \in \left]-1-e^{\frac{1}{4}};-1+e^{\frac{1}{4}}\right[$ ، في هذا المجال (c) فوق (Δ).

$1-4\ln|x+1| < 0$ ومنه $x \in \left]-\infty;-1-e^{\frac{1}{4}}\right[\cup \left]-1+e^{\frac{1}{4}};+\infty\right[$ في هذا المجال

يكون (c) تحت (Δ)

رسم المنحني (c)

4- أ) حساب المساحة $S(\alpha)$ المحددة بالمنحني (c) والمستقيمات التي معادلاتها : $x=-2$, $x=\alpha$, $y=0$

$$S(\alpha) = -\int_{-2}^{\alpha} f(x)\,dx = -\int_{-2}^{\alpha}\left[x+1-2\ln(x+1)^2\right]dx =$$

$$= -\int_{-2}^{\alpha}\left[x+1-4\ln|x+1|\right]dx = -\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-2}^{\alpha} + 4\int_{-2}^{\alpha}\ln|x+1|\,dx$$

لحساب التكامل $\int_{-2}^{\alpha}\ln|x+1|\,dx$ نستعمل المكاملة بالتجزئة .

بوضع $u'(x)=1$ ومنه $u(x)=x$ و $v(x)=\ln|x+1|$ ومنه $v'(x)=\dfrac{1}{x+1}$

$$\int \ln|x+1|\,dx = x\ln|x+1| - \int \frac{x}{x+1}\,dx =$$

$$= x\ln|x+1| - \int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx = x\ln|x+1| - x + \ln|x+1| =$$

$$= (x+1)\ln|x+1| - x + c$$

$$S(\alpha) = \left[-\frac{x^2}{2} + 4(x+1)\ln|x+1| - 5x\right]_{-2}^{\alpha} =$$

$$= \left(-\frac{\alpha^2}{2} + 4(\alpha+1)\ln|\alpha+1| - 5\alpha - 8\right)\ (u.a)$$

ب) إثبات أن $S(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} - 3\alpha - 7$

نعلم أن $f(\alpha) = 0$ ومنه $\alpha + 1 - 4\ln|\alpha+1| = 0$ ومنه $\alpha + 1 = 4\ln|\alpha+1|$

وبتعويض $4\ln|\alpha+1|$ بـ $(\alpha+1)$ في $S(\alpha)$ نجد:

$$S(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{2} - 5\alpha + (\alpha+1)^2 - 8 = \frac{1}{2}\alpha^2 - 3\alpha - 7$$

II. 1) كتابة z' بدلالة z

$$z' = x' + iy' = x - y - 1 + i(x + y + 1) =$$

$$(x+iy) - 1 + ix - y + i = (x+iy) - 1 + ix + i^2y + i =$$

$$= (x+iy) + i(x+iy) + (-1+i) = (1+i)(x+iy) + (-1+i) =$$

$$= (1+i)z + (-1+i)$$

2) طبيعة التحويل T وعناصره المميزة

لدينا $z' = (1+i)z + (-1+i)$ فالتحويل T هو من الشكل $z' = \alpha z + \beta$ وبما أن

$|1+i| = \sqrt{2} \neq 1$ فالتحويل T هو تشابه نسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$ ومركزه

النقطة ϖ ذات اللاحقة : $\frac{-1+i}{1-(1+i)} = \frac{-1+i}{-i} = -1 - i$

3) معادلة المنحني (Γ) صورة المنحني (c) بالتحويل T

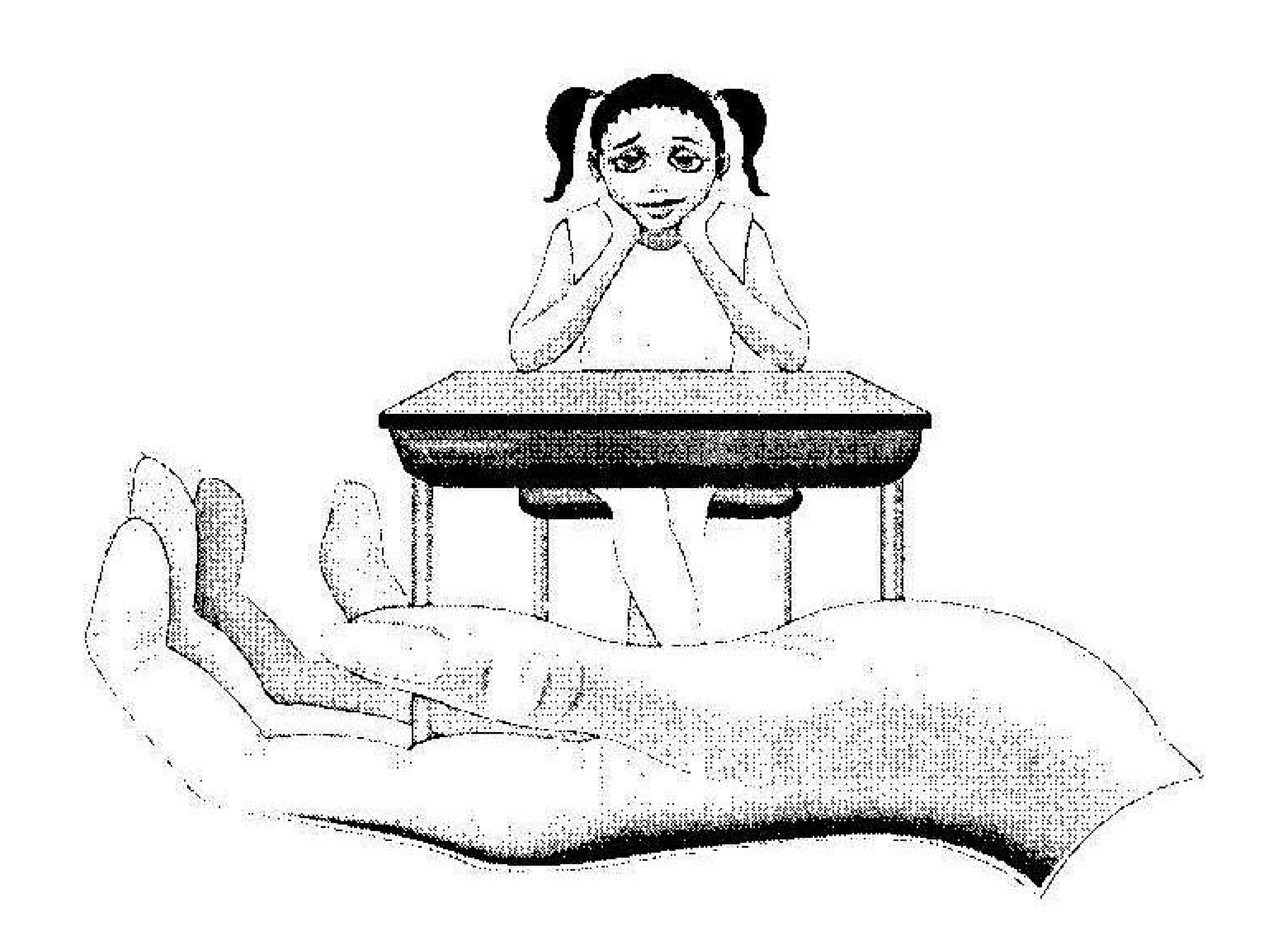
لدينا معادلة المنحني (c) : $y = x+1-4\ln|x+1|$

من العبارة التحليلية للتحويل T نستنتج أن :
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(x'+y') \\ y = \frac{1}{2}(-x'+y'-2) \end{cases}$$

وتكون معادلة المنحني (Γ) صورة المنحني (c) بالتحويل T هي :

$\frac{1}{2}(-x'+y'-2) = \frac{1}{2}(x'+y')+1-4\ln\left|\frac{1}{2}(x'+y')+1\right|$ ومنه

$x'+2-4\ln\left|\frac{1}{2}(x'+y')+1\right| = 0$ وهي معادلة (Γ).



دوال لوغاريتمية مقترحة للدراسة

أدرس دراسة كاملة (تغيرات ، الفروع اللانهائية ، رسم المنحني) لكل من الدوال الآتي :

1) $f(x)=x(1-\ln x)$, 2) $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$

3) $f(x)=x\ln x+(1-x)\ln(1-x)$, 4) $f(x)=\dfrac{x}{x-\ln x}$

5) $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}+\ln|x+1|$, 6) $f(x)=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}\ln|x-2|$

7) $f(x)=(x^2-4x)\ln x-\dfrac{1}{2}(x^2-8x+4)$, 8) $f(x)=2x+1+\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$

9) $f(x)=x^2+1+\ln\dfrac{1}{2x+1}$, 10) $f(x)=\dfrac{1+(\ln x)^2}{1-(\ln x)^2}$

11) $f(x)=x-1-\dfrac{1}{\ln(x-2)}$, 12) $f(x)=-\dfrac{x}{x+1}+\ln(x+1)$

13) $f(x)=\dfrac{\ln x}{1-|\ln x|}$, 14) $f(x)=\dfrac{x\ln x}{x+1}-\ln(x+1)$

15) $f(x)=(\ln x)^2-\ln x-2$, 16) $f(x)=1+\ln x-\dfrac{1}{1-\ln x}$

17) $f(x)=x-1+\ln\dfrac{x-1}{x+2}$, 18) $f(x)=(x+1)\ln|x+1|-x+1$

19) $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x+1}+2\ln(x+1)$, 20) $f(x)=(x^2-x)\ln|x|+\dfrac{x^2}{2}$

21) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}+\ln(x^2-1)$, 22) $f(x)=\dfrac{1}{4-(\ln|x|)^2}$

مسـائل مـقترحة للحـل

مسألة 1

I. لتكن الدالة g المعرفة بـ : $g(x)=\frac{1}{1-x^2}$.

1) برهن على وجود عددين حقيقيين α,β حيث : $g(x)=\frac{\alpha}{1+x}+\frac{\beta}{1-x}$.

2)عين الدوال الأصلية للدالة g في المجال $]-1,1[$.

II. نعتبر الدالة f المعرفة بـ : $f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-x$ وليكن (c) المنحني البياني لها

1) عين مجموعة تعريف الدالة f . 2) أحسب $f(x)+f(-x)$ ، ماذا نستنتج؟

3) أدرس تغيرات الدالة f . 4) أنشئ المنحني (c) (طول الوحدة $2cm$)

5) أكتب معادلة المماس للمنحني (c) عند النقطة $x=0$.

مسألة 2

I. 1) أدرس تغيرات الدالة g المعرفة بـ : $g(x)=-x+1-2\ln x$

2) أحسب $g(1)$ واستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x

II. لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x^2}$.

1) أ- احسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim_{x\to0^+}f(x)$. ب) فسر هندسيا النتيجة .

2) -ا) أحسب $f'(x)$ وبرهن أن إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$

ب) أعطي جدول تغيرات الدالة f .

3) أ- برهن أن : $\forall x\in[1;+\infty[$ فإن $f(x)>0$.

ب)برهن بأن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد $\alpha\in\left]\frac{1}{2};1\right[$. 4) أنشيء المنحني (c)

5)-أ) باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب $\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx$. ب) استنتج حساب مساحة الحيز

المستوي المحدد بالمنحني (c) والمستقيمات التي معادلتاهما : $y=0$, $x=e$, $x=1$.

مسألة 3

I. لتكن الدالة g المعرفة بـ : $g(x) = x\ln x + (1-x)\ln(1-x)$.

1) أدرس تغيرات الدالة g ثم استنتج إشارة $g(x)$. 2)-أ)برهن أن المستقيم ذو المعادلة $x = \frac{1}{2}$ هو محور تناظر للمنحني (c) للدالة g. ب) أنشيء المنحني (c)

3)-أ) باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب : $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} x\ln x dx$ ، $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} (1-x)\ln(1-x)dx$

ب) أحسب المساحة المحددة بـ(c) ومحور الفواصل والمستقيمين $x = \frac{1}{2}$ و $x = \frac{3}{4}$.

II. لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{\ln x}$ وليكن (Γ) منحنيها البياني في معلم جديد متعامد و متجانس . 1) أحسب $f'(x)$ وتحقق أن :

$f'(x) = \frac{-g(x)}{x(1-x)(\ln x)^2}$. 2) أنشيء المنحني (Γ) 1

3) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m حلول المعادلة:

$\ln(1-x) - m\ln x - \ln x = 0$

مسألة 4

نعتبر الدالة f ذات المتغير الحقيقي x والمعرفة بـ : $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+4}\right)$.

ليكن (c) منحني الدالة f . 1)- أ) عين مجموعة تعريف الدالة f

ب) برهن أن $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) + f(-x) = 2\ln 2$. 2) أدرس تغيرات الدالة f

3)أدرس الفروع اللا نهائية للمنحني (c). 4)أنشيء المنحني $((c))$

مسألة 5

I. لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = 2x - 1 + \ln\frac{x}{x+1}$

نسمي (c) الممثل البياني للدالة g في معلم متعامد ومتجانس (طول الوحدة $2cm$).

1)أدرس تغيرات الدالة g . 2)-ا) برهن أ ن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 2x - 1$

هو مستقيم مقارب للمنحني (c).   ب) أدرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى (D)

3) برهن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد على المجال $]0;+\infty[$

4) أنشئ المنحني (c). 5) أحسب المساحة المحددة بالمنحني (c) والمستقيمات :

$x=3$, $x=1$, (D).

II. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_n = g(n) - 2n + 1$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$

1) أدرس تغيرات المتتالية (u_n) واستنتج إشارة u_n. نضع: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$

أ) أحسب S_n بدلالة n.   ب) أحسب $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

مسألة 6

I. لتكن الدالة g المعرفة بـ : $g(x) = \frac{1}{x\ln x}$. 1)- أ) عين مجموعة تعريف الدالة g

ب) أدرس تغيرات الدالة . 2) أنشئ المنحني (c) الممثل البياني للدالة g في معلم متعامد ومتجانس .

3)-أ) عين دالة أصلية للدالة g.   ب) λ عدد حقيقي حيث : $\frac{1}{e} < \lambda < 1$

أحسب مساحة الحيز بالمنحني (c) والمستقيمات : $x = \lambda$, $x = \frac{1}{e}$, $y = 0$

II. نعتبر الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \ln|\ln x|$.   1) أدرس تغيرات الدالة f

2) أدرس الفروع اللا نهائية للمنحني (Γ) للدالة f.

3) أنشئ المنحني (Γ) في معلم جديد متعامد ومتجانس.

مسألة 7

I. نعتبر الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = x + 3 + \ln\frac{|x|+1}{x+2}$ وليكن (c) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس .

1)-أ) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f.   ب) أدرس اشتقاق الدالة f على D_f

2) أدرس تغيرات الدالة f. 3)-أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x - 3$. ماذا نستنتج ؟

ب) أدرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 3$

ذات اللاحقة z' حيث : $\begin{cases} x' = -y+1 \\ y' = x-1 \end{cases}$

1)أكتب z' بدلالة z ثم استنتج طبيعة التحويل T وعنصره المميزة .

2)أكتب معادلة المنحني (δ) صورة المنحني (c) بالتحويل T

مسألة 11

نعتبر الدالة f المعرفة بـ : $\begin{cases} f(x) = x(\ln x - 1)^2 \quad ; \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

وليكن (c) الممثل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس .

1- أ) بين أن f مستمرة على يمين الصفر .

- ب) أدرس قابلية الاشتقاق على يمين الصفر وفسر هندسيا النتيجة .

2) أدرس تغيرات الدالة f . 3- أ) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c) بجوار $(+\infty)$

ب) أرسم المنحني (c) .

4 - أ) باستعمال التكامل بالتجزئة مرتين أحسب $\int_1^e x(\ln x - 1)^2 dx$.

ب) أحسب مساحة الحيز من المستوي المحصور بين (c) المنحني والمستقيمات التي معادلاتها : $y = 0$, $x = e$, $x = 1$.

5) لتكن الدالة g المعرفة كما يلي : $g(x) = x(\ln|x| - 1)^2$ لما $x \neq 0$ و $g(0) = 0$.

أ) بين أن g هي دالة فردية . ب) استنتج إنشاء المنحني (γ) للدالة g

مسألة 12

I. نعتبر الدالة g المعرفة بـ : $g(x) = -\dfrac{1}{x+1} + \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

1) أدرس التغيرات الدالة g ثم استنتج إشارة $g(x)$.

2)لتكن الدالة f المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = x \times \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \quad ; \forall x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$

أ) برهن أن الدالة f مستمرة على يمين 0 $x = 0$.

ب) أدرس قابلية الاشتقاق الدالة f على يمين $x = 0$ وفسر هندسيا النتيجة .

3) أدرس تغيرات الدالة f .

4) أنشيء المنحني (c) للدالة f . 5)ليكن α عدد حقيقي حيث : $0 < \alpha < 1$ ، أحسب المساحة $S(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (c) والمستقيمات التي معادلاتها :

$x = 1$, $x = \alpha$, $y = 0$ ثم أحسب $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} S(\alpha)$

II. نعتبر التحويل T الذي يحول النقطة $M(x; y)$ ذات اللاحقة z إلى النقطة $M'(x'; y')$ ذات اللاحقة z' حيث : $z' = 2iz + 1 - i$

1) عين طبيعة التحويل T وعناصره المميزة .

2) أكتب x', y' بدلالة x, y ثم عين معادلة صورة المنحني (c) بالتحويل T

مسألة 13

I. لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \frac{1}{x-1} - \ln(x^2 - 1)$ نسمي (c) ممثلها البياني في معلم متعامد ومتجانس . 1- أ) أحسب $f(\sqrt{2})$, $f(2)$. ب) أدرس تغيرات الدالة f حـ)برهن بان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل جذرين يطلب إعطاء إشارتهما

2) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c). 3) أنشئ المنحني (c)

4- أ) تحقق بأن الدالة : $x \to (x+\alpha)\ln(x+\alpha) - x$ هي دالة أصلية للدالة : $x \to \ln(x+\alpha)$. ب)تحقق بأن على المجال $]1, +\infty[$ فإن $f(x)$ تكتب :

$f(x) = \frac{1}{x-1} - \ln(x+1) - \ln(x-1)$.

جـ) أحسب المساحة المحددة بالمنحني (c) والمستقيمات التي معادلاتها :

$x = 3$, $x = 2$, $y = 0$.

II. نعتبر الدوران R الذي مركزه $\varpi(1;1)$ وزويته $\frac{\pi}{2}$.

1)عين العبارة المركبة للدوران R .

2) أوجد معادلة صورة المنحني (c) بالدوران R

مسألة 14

لتكن f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x والمعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بـ :

$f(x)=\frac{x}{2}+1+\frac{\ln x}{x}$ وليكن (c) الممثل البياني لها في معلم متعامد ومتجانس .

1- أ) أحسب $f'(x)$. ب) نضع : $h(x)=x^2+2-2\ln x$. أدرس تغيرات الدالة h واستنتج إشارة $h(x)$ على المجال $]0,+\infty[$.

2- أ) تحقق أن $f'(x)=\frac{h(x)}{2x^2}$. ب) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to0^+} f(x)$

جـ) أعطي جدول تغيرات الدالة f . د) أحسب $f(3)$, $f(e)$, $f(2)$, $f(1)$

3- أ) برهن بأن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=\frac{x}{2}+1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c)

- ب) أدرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم (D)

4) أنشئ المنحني (c)

5) أحسب مساحة الحيز المستوي مجموعة النقاط $M(x;y)$ حيث :

$$\begin{cases} 1\le x\le e \\ \frac{x}{2}+1\le y\le f(x) \end{cases}$$

مسألة 15

I. لتكن g الدالة العددية حيث $g(x)=2x^3-1+2\ln|x|$.

1) أدرس تغيرات الدالة g .

2- أ) برهن بأن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α من المجال $\left]\frac{1}{2};1\right[$.

ب)أعطي حصرا للعدد α إلى 10^{-2}. جـ) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x

II. f دالة عددية معرفة بـ : $f(x)=2x-\frac{\ln|x|}{x^2}$ وليكن (c) المنحني الممثل لها في معلم متعامد ومتجانس .

1- أ) عين مجموعة تعريف الدالة f . ب) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من مجموعة تعريف فإن : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$. 2) أدرس تغيرات الدالة f

3- أ) برهن أن : $f\left(\alpha\right)=3\alpha-\dfrac{1}{2\alpha^{2}}$. ب) تحقق أن : $1,6<f\left(\alpha\right)<2,1$

4- أ) برهن أن المنحني $\left(c\right)$ يقبل خطين مقاربين أحدهما مائل $\left(D\right)$ يطلب تعيين معادلته.

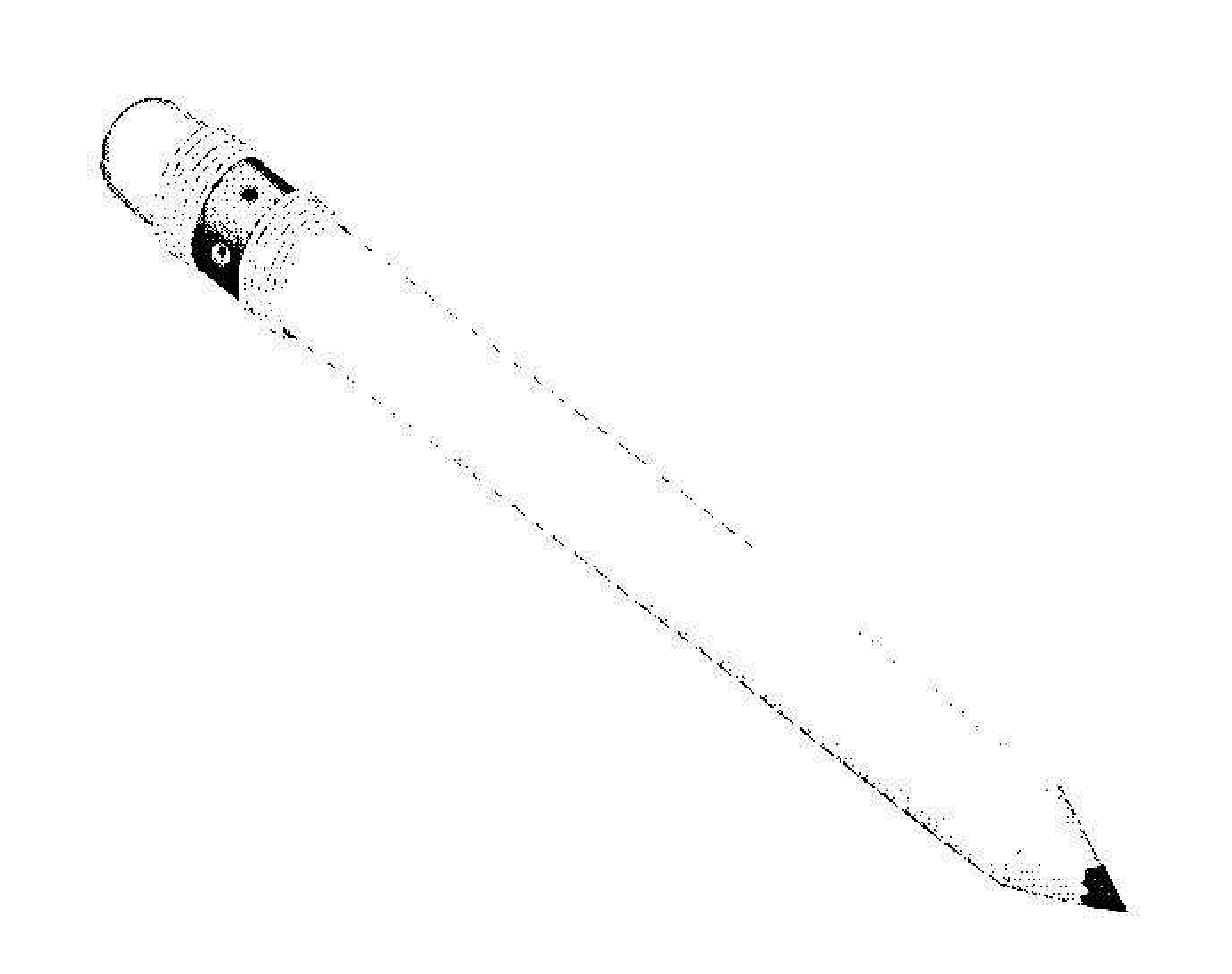
ب) أدرس وضعية المنحني $\left(c\right)$ بالنسبة إلى المستقيم $\left(D\right)$

5) $\left(\Delta\right)$ مستقيم معادلته $y=2x-\dfrac{1}{2e}$. برهن أن المستقيم $\left(\Delta\right)$ يمس المنحني $\left(c\right)$ في نقطتين يطلب تعيين إحداثياتهما . 6) أرسم المماس $\left(\Delta\right)$ والمنحني $\left(c\right)$.

7) m وسيط حقيقي ، ناقش حسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $f\left(x\right)=2x+m$. 8) λ عدد حقيقي ($\lambda\geq 1$) .

نضع : $S\left(\lambda\right)=\int_{1}^{e}\left[2x-f\left(x\right)\right]dx$. أ) فسر هندسيا النتيجة .

ب) باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب العدد $S\left(\lambda\right)$. جـ) أحسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}S\left(\lambda\right)$



الدوال المركبة من الدوال اللوغاريتمية والأسية

دراسة الدوال من الشكل : $f(x)=\begin{cases} f_1(x) \\ f_2(x) \end{cases}$

لتكن الدالة f المكونة من الدالتين f_1 على المجال L_1 و f_2 على المجال L_2 .

لدراسة هذا النوع من الدوال ندرس كل من الدالتين f_1 و f_2 على إنفراد وفي المجالين

D_1 و D_2 على الترتيب حيث : $D_1 = L_1 \cap D_{f_1}$ و $D_2 = L_2 \cap D_{f_2}$

(D_{f_1} و D_{f_2} يمثلان على الترتيب مجموعة التعريف كل من الدالتين f_1 و f_2)

وتكون D_f مجموعة التعريف الدالة f معرفة كما يلي : $D_f = D_1 \cup D_2$

مثال : لتكن الدالة f المعرفة كما يلي :

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) = x^2 - \ln(x^2-1) \quad , \quad x \in]-\infty ;0[\\ f_2(x_2) = \sqrt{3-x} - 2e^x \quad , \quad x \in [0;+\infty[\end{cases}$$

$$D_1 = \{]-\infty;-1[\cup]+1;+\infty[\} \cap \{]-\infty;0[\} =]-\infty;-1[$$

$$D_2 =]-\infty;3] \cap [0;+\infty[= [0;3]$$

$$D_f = D_1 \cup D_2 =]-\infty;-1[\cup [0;3]$$

أمثلة على دراسة الدوال المركبة من الدوال اللوغارتمية و الأسية

أدرس دراسة كاملة (تغيرات، الفروع اللانهائية، رسم المنحني) لكل من الدوال الآتية :

1) $f(x)=\frac{e^{x}}{e^{x}+1}-\ln\left(1+e^{x}\right)$ 2) $f(x)=\ln\left(\frac{e^{2x}+5}{e^{x}-2}\right)$

3) $f(x)=\begin{cases} xe^{1+2x} & , \quad x\leq 0 \\ x(1-\ln x) & , \quad x>0 \end{cases}$

4) $f(x)=\ln\left(e^{x}+e^{-x}\right)$ 5) $f(x)=x+\ln\left|e^{x}-2\right|$

الحـل

1) $f(x)=\frac{e^{x}}{e^{x}+1}-\ln\left(1+e^{x}\right)$

مجموعة التعريف : $D_f=]-\infty, \ +\infty[$

حساب النهايات : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

حساب المشتق : من أجل كل $x\in D_f$: $f'(x)=-\frac{e^{2x}}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}$

جدول التغيرات :

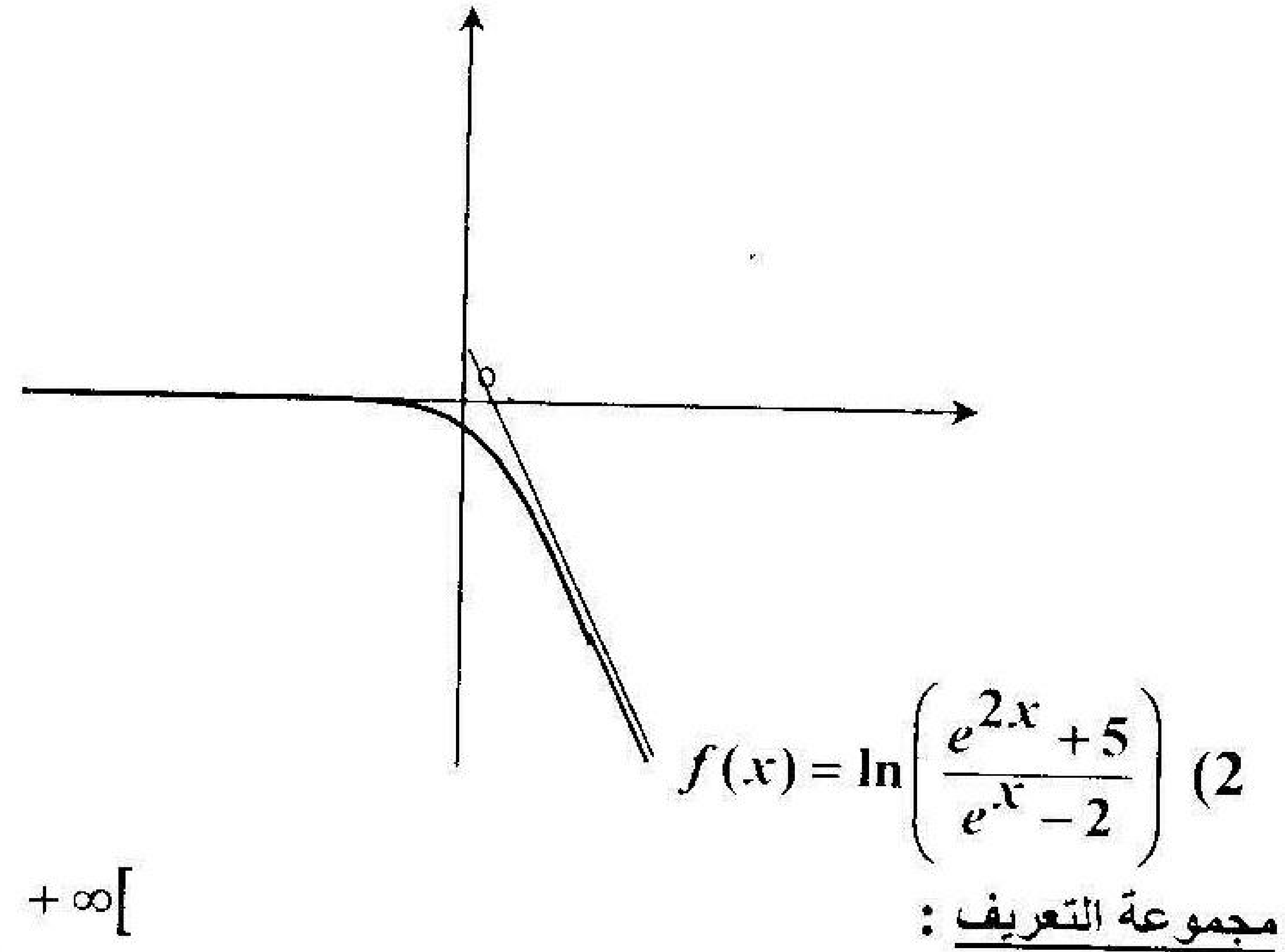
x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	0 ↘ $-\infty$

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $y=0$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(-\infty)$

المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 1$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(+\infty)$

المنحني :



2) $f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x}+5}{e^{x}-2}\right)$

مجموعة التعريف : $D_f =]\ln 2, \quad +\infty[$

حساب النهايات : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x \to \ln 2} f(x) = +\infty$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$: $f'(x) = \frac{e^{x}\left(e^{2x} - 4e^{x} - 5\right)}{\left(e^{2x}+5\right)\left(e^{x}-2\right)}$

جدول التغيرات :

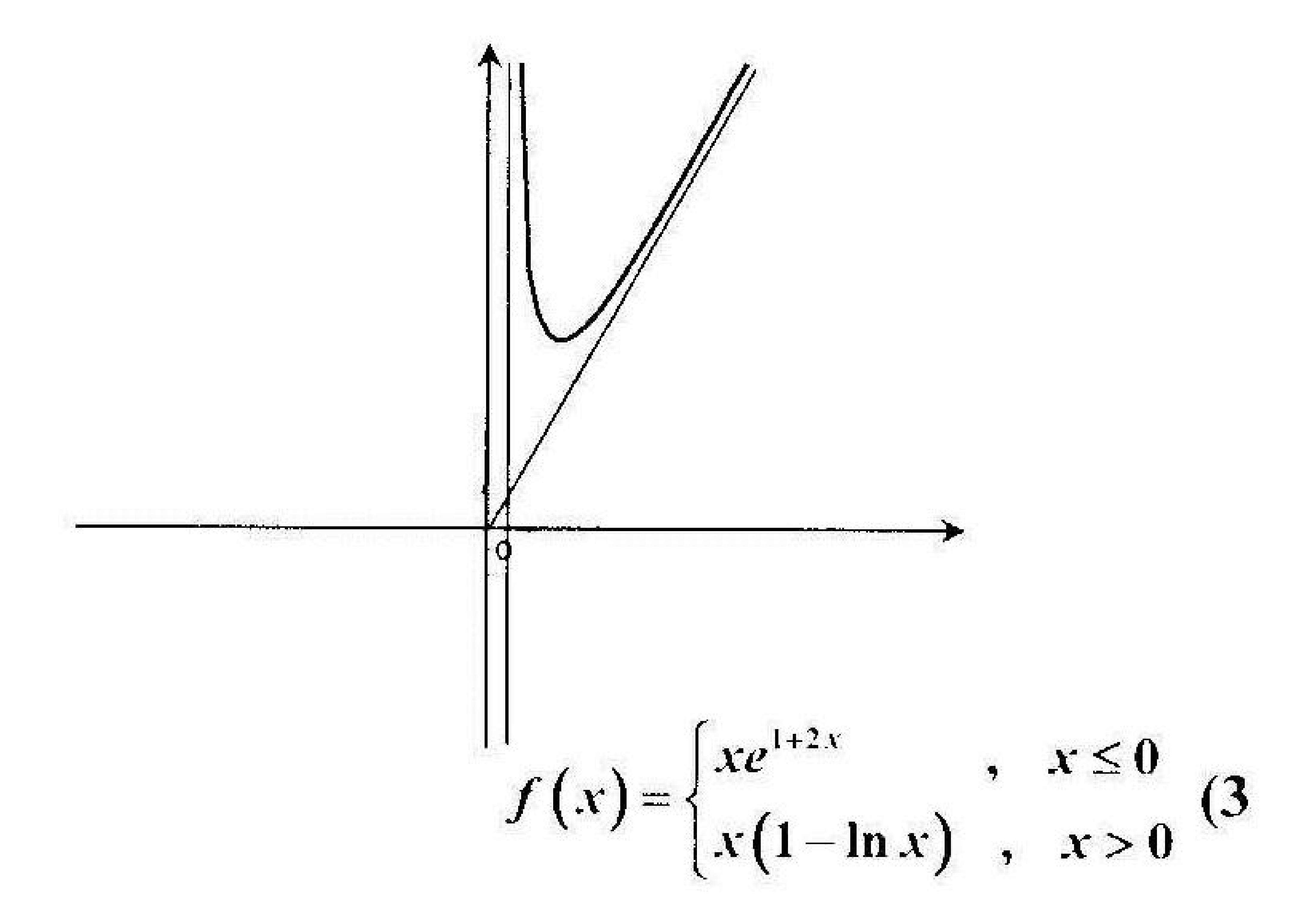
x	$\ln 2$		$\ln 5$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$\ln 10$	↗	$+\infty$

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $x = \ln 2$ هو مستقيم مقارب للمنحني

- المستقيم ذو المعادلة $y = x$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(+\infty)$

المنحني :



3) $f(x) = \begin{cases} xe^{1+2x} & , \quad x \leq 0 \\ x(1 - \ln x) & , \quad x > 0 \end{cases}$

<u>مجموعة التعريف</u> : $D_f =]-\infty, \ +\infty[$

<u>حساب النهايات</u> : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

حساب المشتق : علي المجال $]-\infty, \ 0[$ لدينا $f'(x) = (1+2x)e^{1+2x}$

علي المجال $]0, \ +\infty[$ لدينا $f'(x) = -\ln x$

جدول التغيرات :

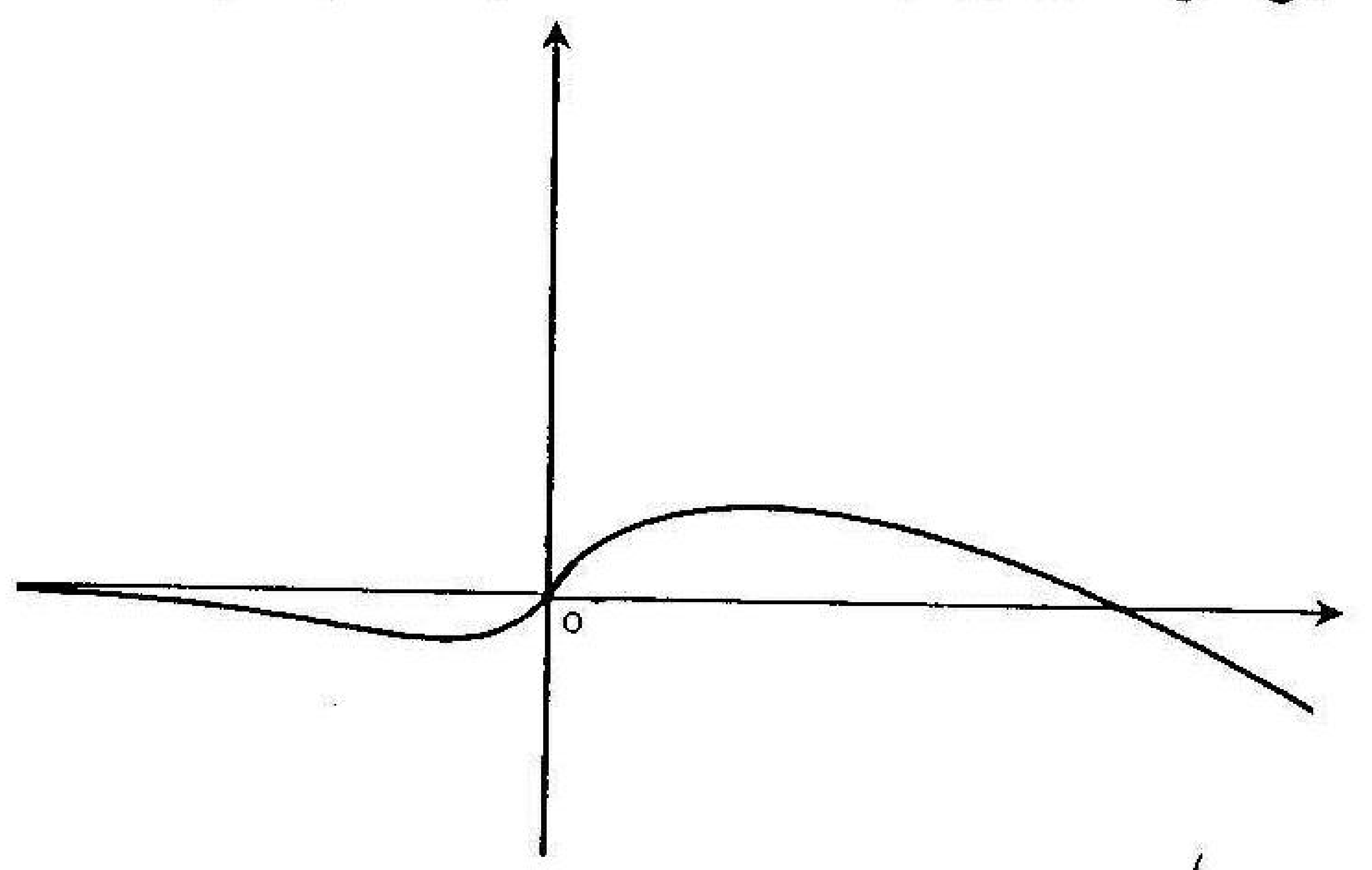
x	$-\infty$	$-1/2$		0		1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$
$f(x)$	0 ↘	$-1/2$	↗		↗	1	↘ $-\infty$

الفروع اللانـهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ هو مستقيم مقارب للمنـحني في جوار $(-\infty)$

- المنحني له فرع قطع مكافئ في اتجاه محور التراتيب في جوار $(+\infty)$

المنحني :



4) $f(x) = \ln\left(e^{x} + e^{-x}\right)$

مجموعة التعريف : $D_f =]-\infty, \ +\infty[$

حساب النهايات : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$: $f'(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$

جدول التغيرات :

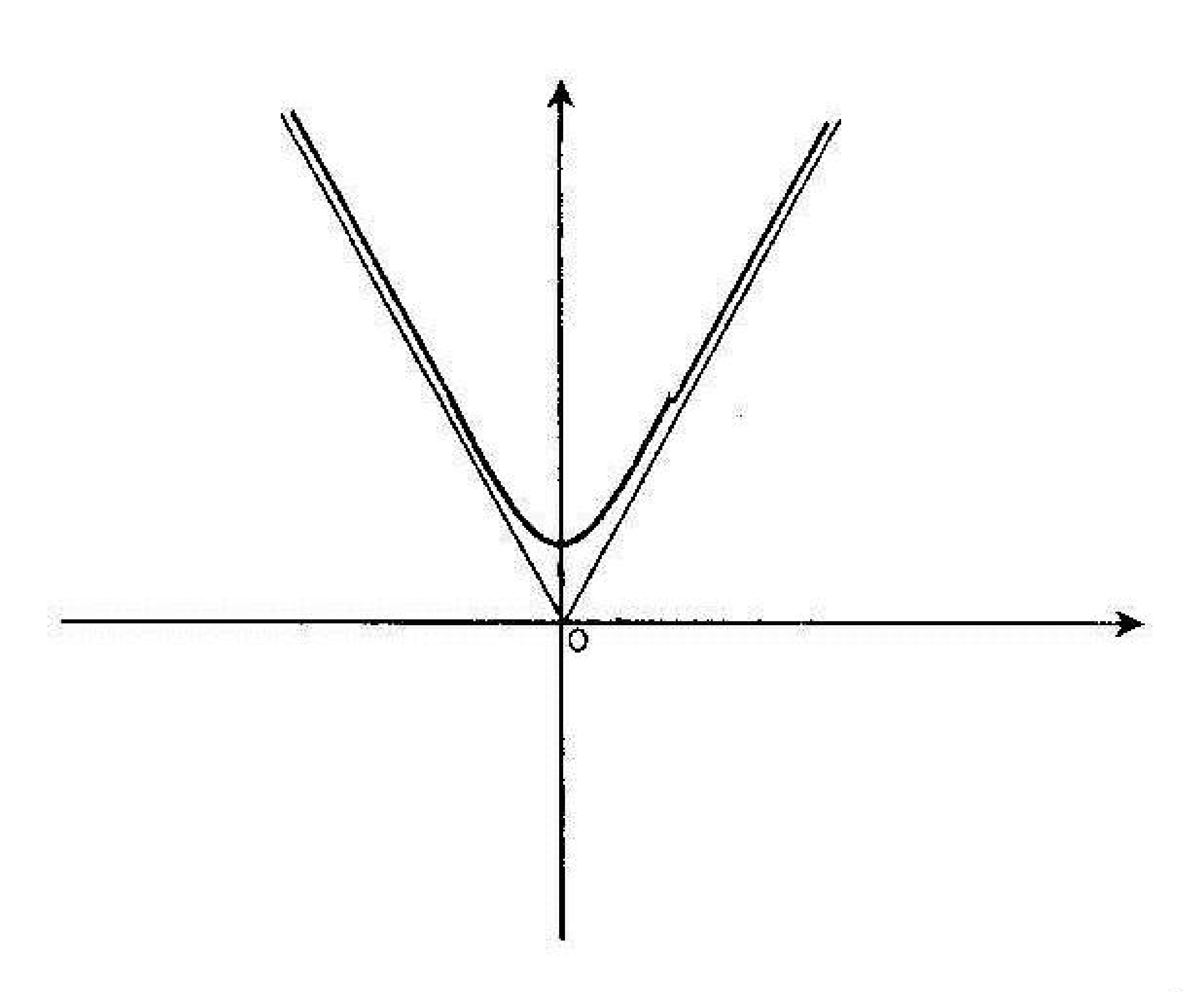
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\ln 2$	↗	$+\infty$

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $y = -x$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(-\infty)$

- المستقيم ذو المعادلة $y = x$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(+\infty)$

المنحني :



5) $f(x) = x + \ln\left|e^{x} - 2\right|$

مجموعة التعريف : $D_f = \left]-\infty, \ \ln 2\right[\cup \left]\ln 2, \ +\infty\right[$

حساب النهايات : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to \ln 2} f(x) = -\infty$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$: $f'(x) = \dfrac{2e^{x} - 2}{e^{x} - 2}$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘ $-\infty$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

4) أنشيء المنحني (c). 5)-أ) أحسب مشتق الدالة g المعرفة بـ :

$g(x)=(x+\alpha)\ln(x+\alpha)$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$. ب) أحسب مساحة الحيز المستوي

المحدد بالمنحني (c) والمستقيمات التي معادلاتها: $y=x+3$, $x=1$, $x=0$

II. نعتبر التحويل T الذي يحول النقطة $M(x;y)$ ذات الاحقه z إلى النقطة

$M'(x';y')$ ذات اللاحقة z' حيث : $\begin{cases} x'=2x-y+3 \\ y'=x+2y+1 \end{cases}$

1) أكتب z' بدلالة z واستنتج طبيعة التحويل T وعناصره المميزة

2) عين صورة المستقيم (Δ) بالتحويل T

مسألة 8

لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x)=\dfrac{x\ln x}{2\ln x-1}$ وليكن (c) المنحني البياني للدالة

f في معلم متعامد ومتجانس. 1)-أ) أحسب $f(e^2)$, $f(e^{-1})$, $f(e)$.

ب) أدرس تغيرات الدالة f. 2)-أ) عين نقاط التقاطع للمنحني (c) مع (xx')

ب) أدرس الفروع اللا نهائية للمنحني (c). جـ) أدرس على المجال $]0,+\infty[$ وضعية

المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=\dfrac{1}{2}x$

3) – أ) برهن بأن المنحني (c) يقبل في نقطة يطلب تعينها مماسا يوازي

المستقيم (D) ذو المعادلة : $x-2y+1=0$. ب) أنشيء المنحني (c).

4) لتكن الدالة h المعرفة بـ : $h(x)=\dfrac{|x\ln x|}{2\ln x-1}$.

أ) أدرس اشتقاق الدالة h عند النقطة $x=1$ وفسر هندسيا النتيجة .

ب) باستعمال المنحني (c) أشرح كيف يمكن إ نشاء المنحني (Γ) للدالة h

مسألة 9

I. لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x)=|x-1|-2\ln\dfrac{x}{x+1}$ وليكن (c) التمثيل

البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس .

1)-أ) عين مجموعة تعريف الدالة f . ب) أدرس اشتقاق الدالة f عند النقطة $x=1$.

2)أدرس تغيرات الدالة f .

3) برهن على وجود عدد حقيقي وحيد x_0 من المجال $]-2;1[$ حيث $f(x_0)=0$ وفسر هندسيا النتيجة .

4) برهن بأن المنحني (c) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين يطلب إعطاء معادلتهما.

5) أنشيء المنحني (c) والنصفي المماسين له عند النقطة $x=1$

6) أ) باستعمال التكامل بالتجزئة عين على المجال $]0,1[$ دالة أصلية للدالة :

$x \to \ln \frac{x}{x+1}$. ب)أحسب المساحة $S(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (c) والمستقيمات التي معادلاتها : $y=0$, $y=0$, $x=1$ حيث: $\lambda \in]0,1[$

جـ) أحسب $\lim S(\lambda)$ لما $\lambda \xrightarrow{>} 0$

II. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_n = f(n)-(n-1)$ حيث $(n \in \mathbb{N}^*)$

1) تحقق أن : $u_n > 0$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$. 2)أحسب : $S_n = u_1 + u_2 + ...u_n$.

مسألة 10

I. نعتبر كثير الحدود $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6$

1- أ) أحسب $P(3)$. ب) استنتج تحليل $P(x)$ وأدرس إشارته .

2) لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 - 2\right) + 3\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|$ نرمز بـ (c) إلى تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس . أ) أحسب $f(-4)$, $f(-3)$, $f(0)$

ب) أدرس تغيرات الدالة f . 3 - أ) برهن أن المنحني (c) يقبل منحني مقارب (Γ) يطلب تعيينه . ب) أدرس وضعية المنحنيين (c) و (Γ) . جـ) برهن أن على المجال $]-4;-3[$ المنحني (c) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة $x_0 \in]-4;-3[$

د) برهن أن على المجال $]1,2[$ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد

4) أنشيء المنحني (c).

5- أ) عين دالة أصلية للدالة : $x \to \ln(x-\alpha)$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$

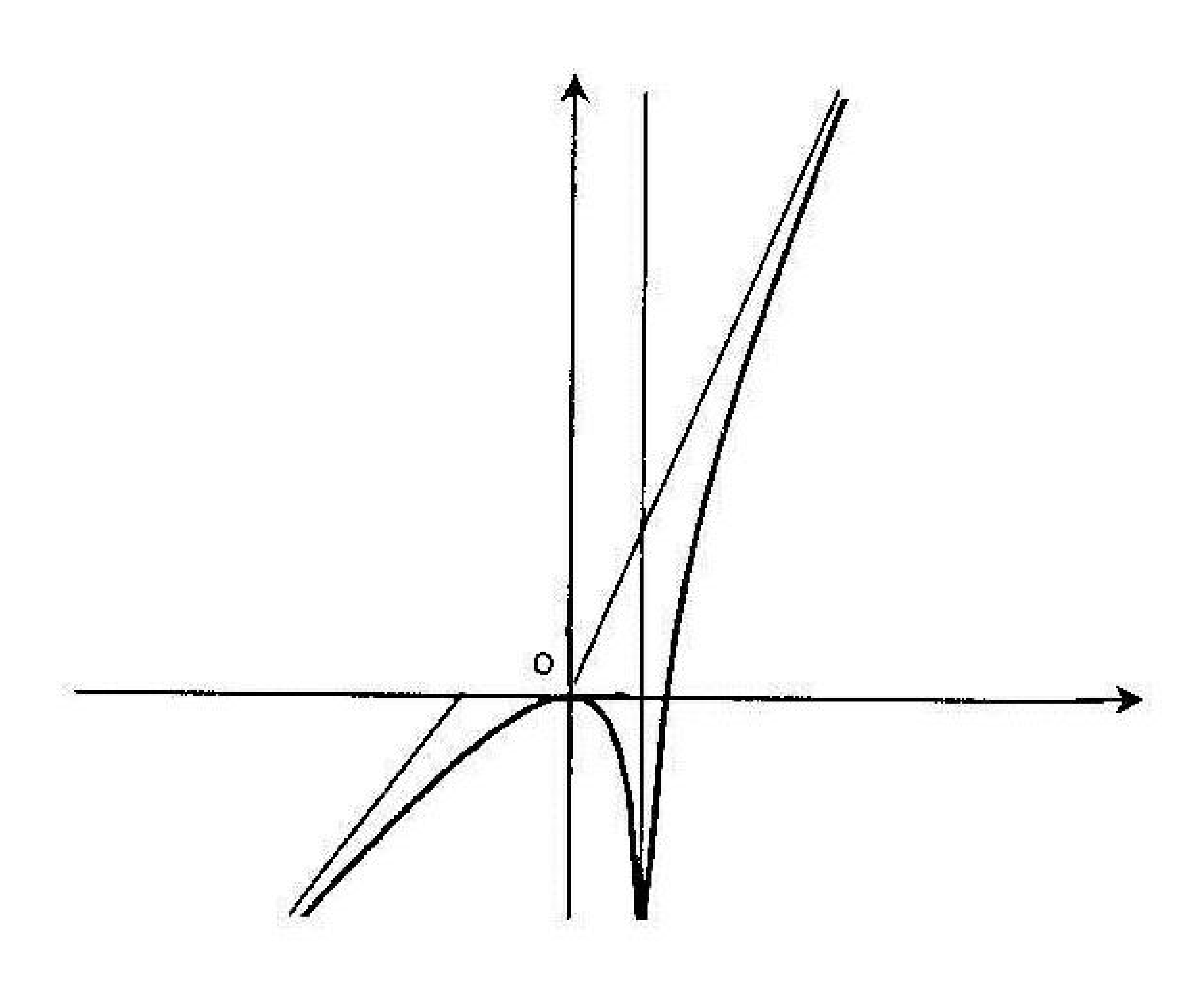
ب) أحسب المساحة المحصورة بين المنحنيين (c) و (Γ) والمستقيمين: $x=3$ و $x=4$

نعتبر التحويل T الذي يرفق بكل نقطة $M(x;y)$ ذات اللاحقة z النقطة $M'(x';y')$

الفروع اللانهائية :

- **المستقيم ذو المعادلة $x = \ln 2$ هو مستقيم مقارب للمنحني**
- **المستقيم ذو المعادلة $y = x + \ln 2$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(-\infty)$**
- المستقيم ذو المعادلة $y = 2x$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(+\infty)$

المنحني :





مسائل محلولة

مسألة 1 :

I) g دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة بـ: $g(x)=(x^2-2x+1)e^x$

1) برهن أن $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x=0$ (ضع $x=2K$)

2) أدرس تغيرات الدالة g .

3) استنتج من الدراسة السابقة أن من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x)\geq 0$

II) f دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة بـ: $f(x)=(x-2)e^x+\ln|x-1|$

وليكن (C) منحنيها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس

1)أ- عين مجموعة تعريف الدالة f .

ب- برهن أنه لكل عدد x من D_f : $f'(x)=\dfrac{g(x)+1}{x-1}$.

جـ -أدرس تغيرات الدالة f .

2) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (C) .

3) أكتب معادلة المماس للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة $x=2$

4) ارسم (C) .

5) h دالة عددية معرفة بـ: $h(x)=(x+\alpha)e^x$ حيث α عدد حقيقي.

أ- عين العدد α حتى تكون الدالة h دالة أصلية للدالة $x\mapsto(x-2)e^x$.

ب – باستخدام التكامل بالتجزئة عين على المجال $]1;+\infty[$ دالة أصلية للدالة :

$x\mapsto\ln|x-1|$. جـ - استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$.

د- λ عدد حقيقي حيث : $1<\lambda\leq 2$. - احسب المساحة $S(\lambda)$ للحيز المستوي المحدود بالمنحني (C) و محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما :

$x=\lambda$ و $x=2$. - احسب $\lim S(\lambda)$ لما $\lambda\xrightarrow{>}1$.

الحـل

I) 1) إثبات أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x=0$:

$$\lim_{x\to-\infty} x^2e^x = \lim_{k\to-\infty}(2k)^2e^{2k} = \lim_{k\to-\infty} 4\times\left(k\times e^k\right)^2 = 0$$

2) دراسة تغيرات الدالة g

<u>مجموعة التعريف</u> : $D_g =]-\infty \ ; \ +\infty[$

<u>حساب النهايات:</u>

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x^2-2x+1\right)e^x = \lim_{x\to-\infty}\left(x^2e^x-2xe^x+e^x\right) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x^2-2x+1\right)e^x = +\infty$$

<u>حساب المشتق ودراسة إشارته:</u>

لكل x من D_g : $g'(x) = (2x-2)e^x + e^x\left(x^2-2x+1\right) = \left(x^2-1\right)e^x$

$g'(x)=0$ ومنه $\left(x^2-1\right)e^x = 0$ ومنه $x^2-1=0$ ومنه $x=-1$ أو $x=+1$

$g'(x)>0$ يكافئ $\left(x^2-1\right)e^x>0$ ومنه $x\in]-\infty \ ; \ -1[\cup]1 \ ; \ +\infty[$.

$g'(x)<0$ من أجل كل $x\in]-1 \ ; +1[$.

<u>جدول التغيرات</u> :

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	↗	$\frac{4}{e}$	↘	0	↗	$+\infty$

3)نستنتج من جدول تغيرات الدالة g أن لكل عدد x من $\mathbb{R}$: $g(x)\geq 0$.

II) 1) أ- مجموعة تعريف الدالة f :

f معرفة إذا كان $x-1\neq 0$ ومنه $x\neq 1$ ومنه : $D_f =]-\infty \ \ 1[\cup]1; \ +\infty[$

ب -إثبات أنه لكل عدد x من D : $f'(x) = \dfrac{g(x)+1}{x-1}$.

لكل عدد x من D_f :

$$f'(x) = e^x + e^x(x-2) + \frac{1}{x-1} = (x-1)e^x + \frac{1}{x-1}$$

$$= \frac{(x-1)^2 e^x + 1}{x-1} = \frac{(x^2 - 2x + 1)e^x + 1}{x-1} = \frac{g(x)+1}{x-1}$$

جـ) دراسة تغيرات الدالة f

حساب النهايات:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (xe^x - 2e^x) + \ln|x-1| = +\infty$$

(لأن $xe^x \to 0$ و $e^x \to 0$ لما $x \to -\infty$)

$$\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty \quad ، \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

حساب المشتق ودراسة إشارته:

لكل x من D_f : $f'(x) = \frac{g(x)+1}{x-1}$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x-1$ لأن $g(x)+1 > 0$ لكل x من D_f .

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$+1$	$+\infty$
$f'(x)$	-	‖	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗ $+\infty$

2) دراسة الفروع اللانهائية للمنحنى (C) :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x-2}{x} e^x + \frac{\ln|x-1|}{x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left[\left(\frac{x-2}{x} \right) e^x + \frac{\ln(1-x)}{(1-x)} \times \frac{1-x}{x} \right]$$

$$= (1 \times 0) + 0 \times (-1) = 0$$

في جوار $-\infty$ المنحني (C) يقبل فرع مكافئ في اتجاه (xx') .

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x-2}{x} e^x + \frac{\ln(x-1)}{(x-1)} \times \frac{x-1}{x}$$

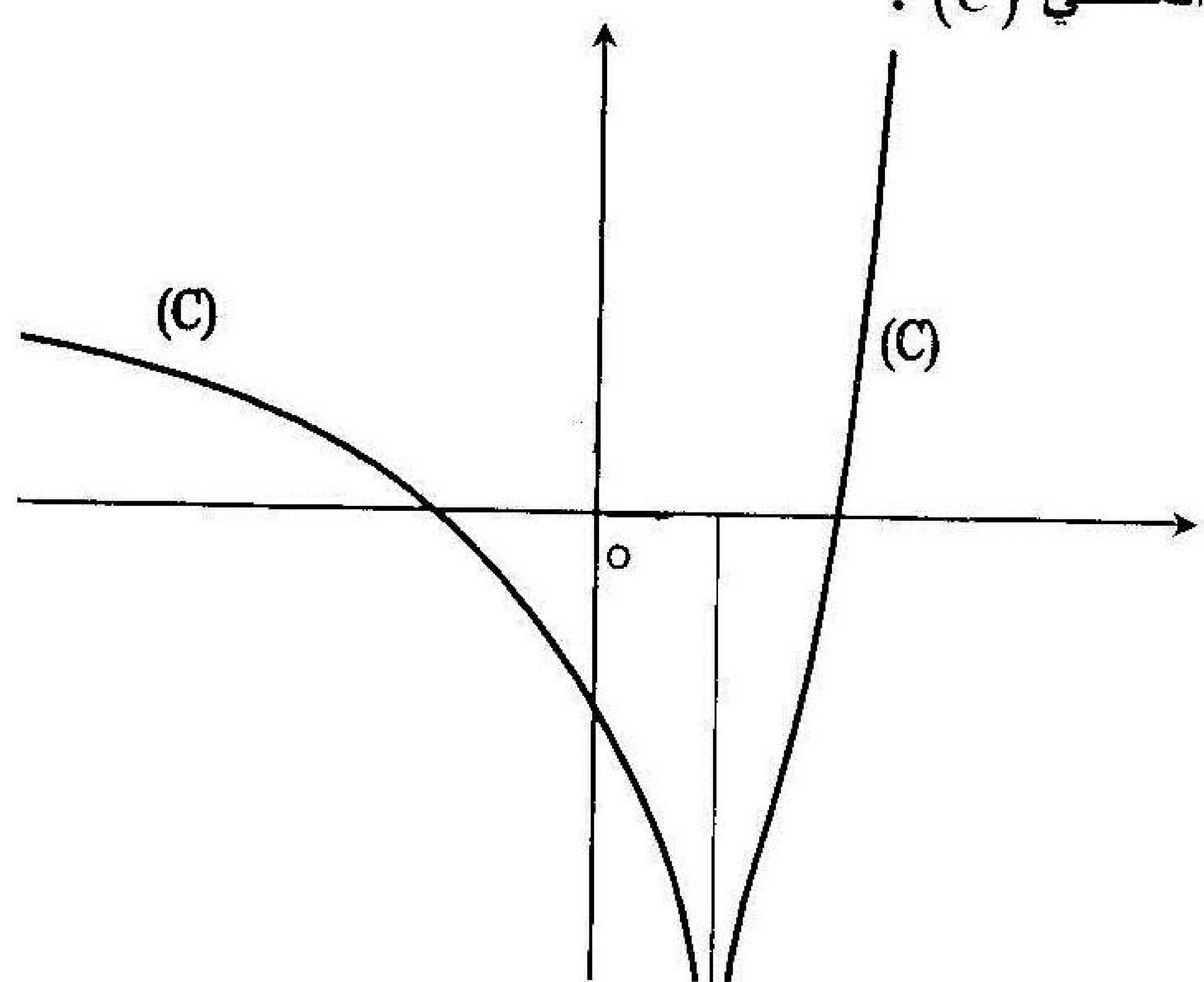
$$= +\infty \times 1 = +\infty$$

في جوار $+\infty$ المنحني (C) يقبل فرع مكافئ في اتجاه (yy') .

3) معادلة المماس للمنحني (C) عند النقطة $x=2$:

$$y=f'(2)(x-2)+f(2)=(e^2+1)(x-2)=(e^2+1)x-2(e^2+1)$$

4) رسم المنحني (C) :



5) أ- تعيين العدد الحقيقي α :

الدالة h دالة أصلية للدالة : $x\mapsto(x-2)e^x$ يعني $h'(x)=(x-2)e^x$

ومنه $(x+\alpha+1)e^x=(x-2)e^x$ ومنه $x+\alpha+1=x-2$ ومنه : $\alpha=-3$.

إذن $(c\in\mathbb{R})$ $\int(x-2)e^x dx=(x-3)e^x+c$

ب- تعيين دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln|x-1|$ على المجال $]1;+\infty[$:

$\int\ln|x-1|dx$ بوضع $u'(x)=1$ ومنه $u(x)=x$.

و $v(x)=\ln|x-1|$ ومنه $v'(x)=\dfrac{1}{x-1}$

$$\int\ln|x-1|dx=x\times\ln|x-1|-\int\frac{x}{x-1}dx=x\times\ln|x-1|-\int\left(1+\frac{x}{x-1}\right)$$

$$=x\times\ln|x-1|-x-\ln|x-1|+c=(x-1)\ln|x-1|-x+c$$

وعلى المجال $]1;+\infty[$ فإن : $\int \ln|x-1|dx = (x-1)\ln(x-1) - x + c$

جـ - استنتاج دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$:

$$\int f(x)dx = \int (x-2)e^x dx + \int \ln|x-1|dx$$
$$= (x-3)e^x + (x-1)\ln(x-1) - x + c$$

د - حساب المساحة $S(\lambda)$:

$$S(\lambda) = -\int_{\lambda}^{2} f(x)dx = -\left[(x-3)e^x + (x-1)\ln(x-1) - x\right]_{\lambda}^{2}$$
$$= -(-e^2-2) + (\lambda-3)e^{\lambda} + (\lambda-1)\ln(\lambda-1) - \lambda$$
$$= e^2 + 2 + (\lambda-3)e^{\lambda} + (\lambda-1)\ln(\lambda-1) - \lambda \ (u.a)$$

$$\lim_{\lambda \to 1} S(\lambda) = \lim_{\lambda \to 1}\left[e^2 + 2 + (\lambda-3)e^{\lambda} + (\lambda-1)\ln(\lambda-1) - \lambda\right]$$
$$= (e^2 - 2e + 1) \quad (u.a)$$

مسألة 2 :

I) لتكن الدالة f المعرفة بـ: $f(x) = x - 1 + \ln(e^x + 2e^{-x} - 3)$ ، وليكن (C) منحنيها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ- عين المجموعة D_f مجموعة تعريف الدالة f .

ب- تحقق أنه من أجل كل $x \in D_f$ فإن $f(x) = -1 + \ln(e^{2x} - 3e^x + 2)$.

2) أدرس تغيرات الدالة f .

3) أ-برهن بأن المنحني (C) يقطع (xx') في النقطة $x_0 \in]\ln 3; \ln 4[$.

ب- برهن أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 2x - 1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C) .

4) أنشئ المنحني (C) .

II) نعتبر المعادلة التفاضلية $(*)$.... $y' - y = e^{2x} - 2$.

1) تحقق بأن الدالة g المعرفة بـ $g(x) = e^{2x} - 3e^x + 2$ هي حلا للمعادلة $(*)$.

2) نضع $z = y - g$.

أ- برهن أن y هي حل للمعادلة $(*)$ إذا و فقط إذا كان z حل للمعادلة

$z' - z = 0$ ....(2)

ب- حل المعادلة (2) ، ثم استنتج حلول المعادلة (*) .

جـ عين حلا للمعادلة (*) و الذي يحقق $y(0)=1$.

الحـل

I) 1-أ) تعيين مجموعة تعريف الدالة f :

f معرفة إذا كان $\left(e^x+2e^{-x}-3\right)>0$ ومنه $\left(e^x+\frac{2}{e^x}-3\right)>0$ ومنه

$\frac{e^{2x}-3e^x+2}{e^x}>0$ ومنه $e^{2x}-3e^x+2>0$.

بوضع $e^x=z$ فإن : $e^{2x}-3e^x+2=0$ يكافئ $z^2-3z+2=0$ ومنه

($z_1=2$ أو $z_2=1$) ومنه ($x_1=\ln z_1=\ln 2$ أو $x_2=\ln z_2=\ln 1=0$)

$z^2-3z+2>0$ ومنه $(z-z_1)(z-z_2)>0$ ومنه $(e^x-2)(e^x-1)>0$.

x	$-\infty$		0		$\ln 2$		$+\infty$
e^x-2			-		0	+	
e^x-1		-	0		+		
$(e^x-2)(e^x-1)$		+	0	-	0	+	

$(e^x-2)(e^x-1)>0$ من أجل كل $x\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]\ln 2;+\infty\right[$

إذن : $D_f=\left]-\infty;0\right[\cup\left]\ln 2;+\infty\right[$

ب- التحقق بأن $f(x)=-1+\ln\left(e^{2x}-3e^x+2\right)$:

من أجل كل $x\in D_f$:

$$f(x)=x-1+\ln\left(e^x+2e^{-x}-3\right)=x-1+\ln\frac{e^{2x}-3e^x+2}{e^x}$$

$$=x-1+\ln\left(e^{2x}-3e^x+2\right)-\ln e^x$$

$$=x-1+\ln\left(e^{2x}-3e^x+2\right)-x$$

$$=-1+\ln\left(e^{2x}-3e^x+2\right)$$

2) دراسة تغيرات الدالة f

<u>حساب النهايات:</u>

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} -1 + \ln\left(e^{2x} - 3e^{x} + 2\right) = -1 + \ln 2$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = -\infty \quad ، \quad \lim_{x \xrightarrow{>} \ln 2} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x - 1 + \ln\left(e^{x} + 2e^{-x} - 3\right) = +\infty$$

<u>حساب المشتق ودراسة اشارته:</u> لكل x من D_f :

$f'(x) = \dfrac{2e^{2x} - 3e^{x}}{e^{2x} - 3e^{x} + 2}$. إشارة $f'(x)$ هي إشارة $2e^{2x} - 3e^{x}$

(لأن من أجل كل $x \in D_f$: $e^{2x} - 3e^{x} + 2 > 0$) .

$f'(x) = 0$ ومنه $2e^{2x} - 3e^{x} = 0$ ومنه $e^{x}\left(2e^{x} - 3\right) = 0$ ومنه $e^{x} = \dfrac{3}{2}$ ومنه

$x = \ln\dfrac{3}{2} \notin D_f$. $f'(x) > 0$ يكافئ $e^{x}\left(2e^{x} - 3\right) > 0$

ومنه($2e^{x} - 3 > 0$ و $x \in D_f$) ومنه $x > \ln 2$

$f'(x) < 0$ ومنه $e^{x}\left(2e^{x} - 3\right) < 0$ ومنه($x < \ln\dfrac{3}{2}$ و $x \in D_f$) ومنه $x < 0$

<u>جدول التغيرات</u> :

x	$-\infty$	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	▨	▨	+
$f(x)$	$-1+\ln 2$ ↘ $-\infty$	▨	▨	$-\infty$ ↗ $+\infty$

3) أ- البرهان بأن المنحني (C) يقطع (xx') في النقطة $x_0 \in \left]\ln 3; \ln 4\right[$

$$f(\ln 3) = -1 + \ln\left(e^{2\ln 3} - 3e^{\ln 3} + 2\right)$$

$$= -1 + \ln\left(e^{\ln 9} - 3 \times 3\right) + 2$$

$$= -1 + \ln(9 - 9 + 2) = -1 + \ln 2 > 0$$

$$f(\ln 4) = -1 + \ln\left(e^{2\ln 4} - 3e^{\ln 4} + 2\right)$$
$$= -1 + \ln(16 - 12 + 2) = -1 + \ln 6 < 0$$

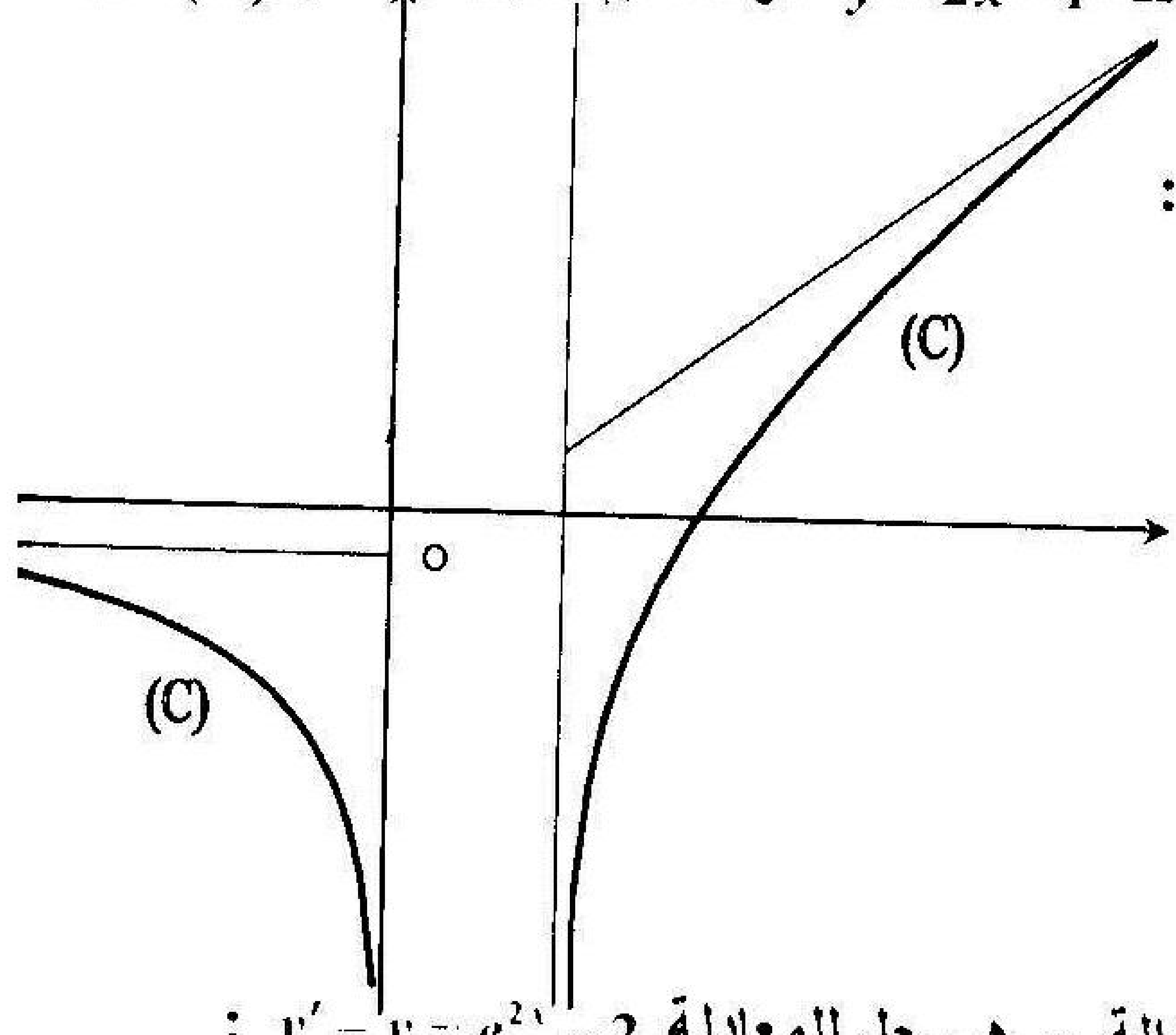
على المجال $[\ln 3; \ln 4]$ الدالة f مستمرة و متزايدة و $0 > f(\ln 4) \times f(\ln 3)$ ، حسب مبرهنة القيم المتوسطة فالمنحنى (C) يقطع (xx') في نقطة وحيدة $x_0 \in]\ln 3; \ln 4[$.

ب- إثبات أن المستقيم (D) ذوالمعادلة $y = 2x - 1$ هومستقيم مقارب لـ(C) :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - (2x-1)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[-1 + \ln\left(e^{2x} - 3e^{x} + 2\right) - (2x-1)\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(e^{2x} - 3e^{x} + 2\right) - 2x$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \ln e^{2x}\left(1 - 3e^{x} + 2e^{-2x}\right) - 2x$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\ln e^{2x} + \ln\left(1 - 3e^{-x} + 2e^{-2x}\right) - 2x\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[2x + \ln\left(1 - 3e^{-x} + 2e^{-2x}\right) - 2x\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1 - 3e^{-x} + 2e^{-2x}\right) = 0$$

إذن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 2x - 1$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C) في جوار $(+\infty)$.

4) رسم المنحني (C) :



II) 1) التحقق بأن الدالة g هي حل للمعادلة $y' - y = e^{2x} - 2$:

$g'(x)-g(x)=\left(2e^{2x}-3e^{x}\right)-\left(e^{2x}-3e^{x}+2\right)=e^{2x}-2$

إذن الدالة g المعرفة بـ: $g(x)=e^{2x}-3e^{x}-2$ هي حل للمعادلة

$y'-y=e^{2x}-2$.

2)أ- إثبات أن y حل للمعادلة (*) إذا و فقط إذا كان z حل للمعادلة $z'-z=0$

لدينا $z=y-k$ ومنه $y=z+k$. y حل للمعادلة(*) يكافئ $y'-y=e^{2x}-2$

يكافئ $(z+k)'-(z+k)=e^{2x}-2$ يكافئ $(z'-z)+(k'-k)=e^{2x}-2$

(لكن $k'(x)-k(x)=e^{2x}-2$ ، إذن تكون y حل للمعادلة(*) إذا كان z حلا للمعادلة $z'-2z=0$.

ب- حلول المعادلة $z'-2z=0$:

$z'-2z=0$ ومنه $z'=2z$ ومنه $z=\lambda e^{2x}$ (حيث $\lambda\in\mathbb{R}$)

و تكون حلول المعادلة (*) هي : $y=z+k=\lambda e^{2x}+e^{2x}-3e^{2x}+2$

جـ - تعيين حل المعادلة (*) و الذي يحقق $y(0)=1$:

نعلم أن مجموعة حلول المعادلة (*) هي $y=\lambda e^{2x}+e^{2x}-3e^{2x}+2$ ومنه :

$y(0)=1$ يكافئ $\lambda+1-3+2=1$ ومنه $\lambda=1$.

إذن الحل المطلوب هو الحل المعرف بـ : $y=e^{2x}-3e^{2x}+2$.

مسألة 3

I. g دالة عددية ذات المتغير الحقيقي x معرفة بـ : $g(x)=\dfrac{2x-2}{x-2}-e^{x}$.

1) أحسب $g(0)$ وادرس تغيرات الدالة g .

2) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-\infty;-2[$

II. لتكن الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=2x-e^{x}+2\ln(2-x)$ وليكن (C) المنحني البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$(طول الوحدة $2cm$)

1) أدرس تغيرات الدالة f . 2) أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α,β حيث : $-0,9<\alpha<-0,8$ و $0,6<\beta<0,9$ وفسر هندسيا النتيجة .

3) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (C).

4- أ) أثبت أن المعادلة $-e^{x}+2\ln(2-x)=0$ تقبل حل وحيد x_0 حيث $x_0\in]0;1[$.

ب) استنتج وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x$.

5) أرسم المنحني (C). 6- أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة عين على المجال $]-\infty;2[$ دالة أصلية للدالة $x \to \ln(2-x)$. ب) احسب بـ (cm^2) المساحة $S(\lambda)$ المحددة بالمنحني (C) والمستقيمات : $x = \lambda$, $x = 1$, $y = 0$ وأحسب $\lim\limits_{\lambda \xrightarrow{<} 2} S(\lambda)$

الحـــل

I. 1) حساب $g(0)$ ودراسة تغيرات الدالة g

$g(0) = 0$.

مجموعة تعريف : $D_g =]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

حساب النهايات : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 2$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_g$:

$$g'(x) = \frac{2(x-2)-(2x-2)}{(x-2)^2} - e^x = -\left(\frac{2}{(x-2)^2} + e^x\right) < 0$$

جدول تغيرات الدالة g

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	||	$-$
$g(x)$	$2 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow -\infty$

2) استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]-\infty;2[$

من جدول تغيرات الدالة g نلاحظ أن إشارة $g(x)$ على المجال $]-\infty;2[$ هي كما يلي :

$g(x) > 0$ من أجل كل $x \in]-\infty;0[$ و $g(x) < 0$ من أجل كل $x \in]0;2[$

II. 1) دراسة تغيرات الدالة f

مجموعة تعريف الدالة f : $D_f =]-\infty;2[$

حساب النهايات : $\lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} 2} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} 2} \left[2x - e^x + 2\ln(2-x)\right] = -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\left[2 - \frac{e^x}{x} + \frac{2\ln(2-x)}{x}\right] =$$

$$\lim_{x\to-\infty} x\left[2 - \frac{e^x}{x} + \frac{2\ln(2-x)}{2-x} \times \frac{2-x}{x}\right] = -\infty$$

(لأن: $\lim_{x\to-\infty} \frac{2-x}{x} = -1$ ، $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = 0$ ، $\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(2-x)}{2-x} = 0$)

حساب المشتق ودراسة إشارته : من أجل كل $x \in D_f$:

$$f'(x) = 2 - e^x + \frac{2}{x-2} = \frac{2x-2}{x-2} - e^x = g(x).$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$.

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$ $\quad$ 0 $\quad$ 2
$f'(x)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $f(0)$ ↘ $-\infty$

2) إثبات أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث :

$$-0,9 < \alpha < -0,8 \quad \text{و} \quad 0,6 < \beta < 0,9$$

$$f(-0,8) = 0,009 \quad , \quad f(-0,9) = -0,07$$

$$f(0,7) = -0,08 \quad , \quad f(0,6) = 0,06$$

الدالة f مستمرة ومتزايدة في المجال $[-0,9;-0,8]$ والعدد 0 محصور بين $f(-0,9)$ و $f(-0,8)$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث $-0,9 < \alpha < -0,8$. باستعمال نفس الطريقة(مبرهنة القيم المتوسطة) نبرهن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد β حيث: $0,6 < \beta < 0,9$.

ونفسر هندسيا النتيجتين بأن المنحني (c) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما α و β.

3) دراسة الفروع اللانهائية للمنحني (C)

المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left[2 - \frac{e^x}{x} + \frac{2\ln(2-x)}{x}\right] =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[2 - \frac{e^x}{x} + \frac{2\ln(2-x)}{2-x} \times \frac{2-x}{x}\right] = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - 2x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[-e^x + 2\ln(2-x)\right] = +\infty$$

إذن في جوار $(-\infty)$ المنحني (C) له فرع قطع مكافئ في اتجاه المستقيم ذو المعادلة $y = 2x$

4- أ) إثبات أن المعادلة $-e^x + 2\ln(2-x) = 0$ تقبل حل حيد $x_0 \in]0;1[$

على المجال $]0;1[$ الدالة h المعرفة بـ : $h(x) = -e^x + 2\ln(2-x)$ مستمرة و $h(1) = -e < 0$, $h(0) = -1 + 2\ln 2 > 0$ ومن أجل كل $x \in]0;1[$ لدينا :

$h'(x) = -e^x - \dfrac{2}{2-x} < 0$ ، الدالة h مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]0;1[$

والعدد 0 محصور بين $f(0)$ و $f(1)$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة:

$-e^x + 2\ln(2-x) = 0$ تقبل حل وحيد $x_0 \in]0;1[$.

ب) استنتاج وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) : $y = 2x$

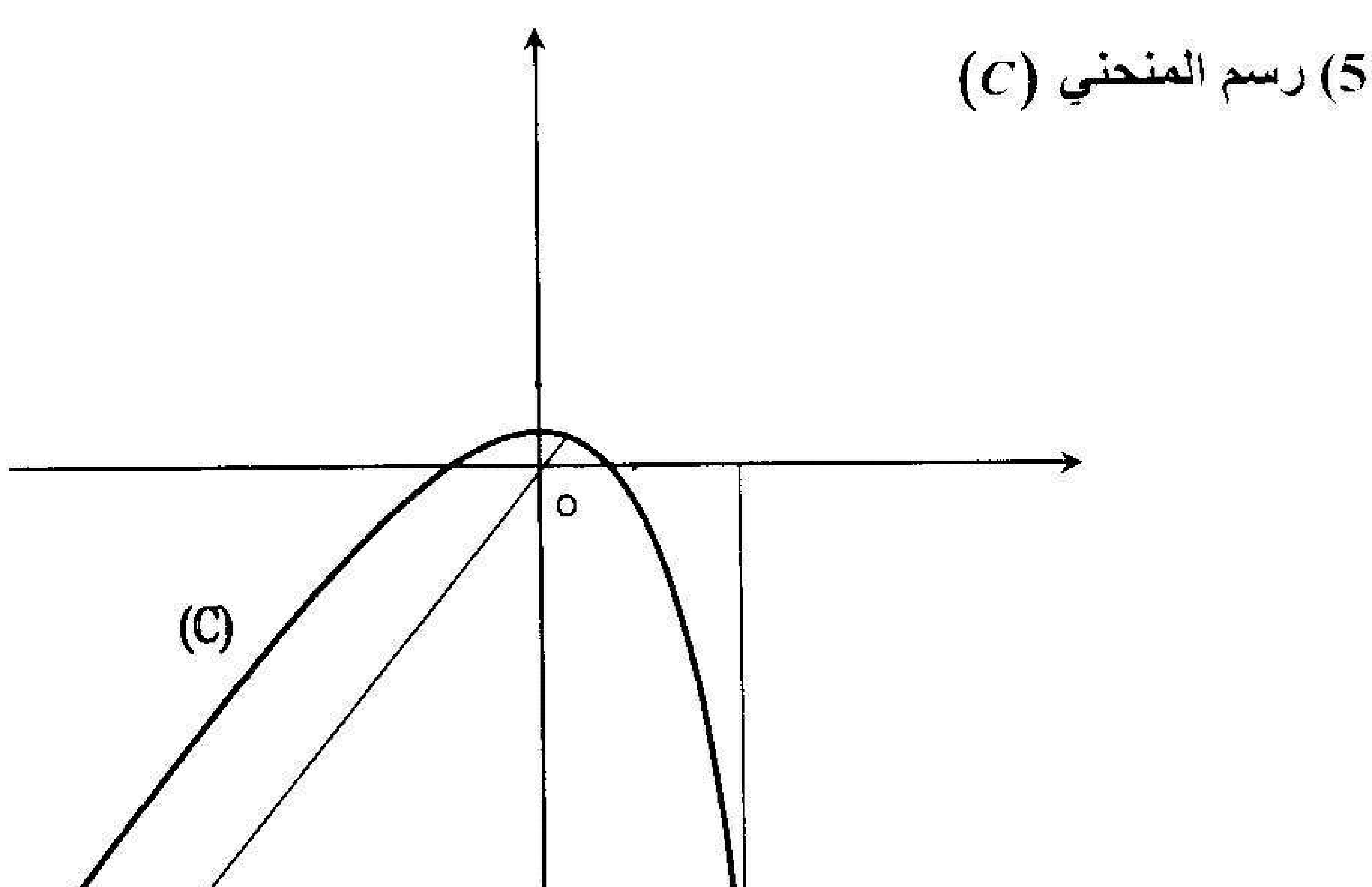
$f(x) - 2x = -e^x + 2\ln(2-x) = h(x)$. حسب السؤال السابق المعادلة

$h(x) = 0$ تقبل حل وحيد إذن المنحني (C) و (Δ) يتقاطعان في النقطة x_0

$h(x) > 0$ من أجل $x \in]-\infty; x_0[$ ويكون على هذا المجال (C) فوق (Δ)

$h(x) < 0$ من أجل $x \in]x_0; 2[$ ويكون على هذا المجال (C) تحت (Δ)

5) رسم المنحني (C)



6- أ) تعيين على المجال $]-\infty;2[$ دالة أصلية للدالة : $x \to \ln(2-x)$.

نستعمل المكاملة بالتجزئة لحساب $\int \ln(2-x)dx$. بوضع $u'(x)=1$

ومنه $u(x)=x$ ، و $v(x)=\ln(2-x)$ ومنه $v'(x)=-\frac{1}{2-x}$.

$$\int \ln(2-x)dx = x\ln(2-x) + \int \frac{x}{2-x}dx =$$

$$= x\ln(2-x) + \int\left(-1+\frac{2}{2-x}\right)dx = x\ln(2-x) - x - 2\ln(2-x) =$$

$$= (x-2)\ln(2-x) - x + c$$

ب) حساب بـ (cm^2) المساحة $S(\lambda)$

$$S(\lambda) = -\int_1^e f(x)dx = -\int_1^e \left[2x - e^x + 2\ln(2-x)\right]dx =$$

$$= -\left[x^2 - e^x + 2(x-2)\ln(2-x) - 2x\right]_1^e =$$

$$= \left(-\lambda^2 + e^\lambda - 2(\lambda-2)\ln(2-\lambda) + 2\lambda\right) + (-e-1) =$$

$$= \left(-\lambda^2 + e^\lambda - 2(\lambda-2)\ln(2-\lambda) + 2\lambda - e - 1\right) \times 4cm^2$$

$$\lim_{\substack{\lambda \to 2 \\ <}} S(\lambda) = (e^2 - e - 1) \times 4cm^2$$

(لأن $\lim_{\substack{\lambda \to 2 \\ <}} (\lambda - 2)\ln(2-\lambda) = -\lim_{\substack{\lambda \to 2 \\ <}} (2-\lambda)\ln(2-\lambda) = 0$)

مسألة 4

I. لتكن الدالة العددية f المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}} & , x < 0 \\ f_2(x) = x(-2+\ln x) \times \ln x & , x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

نرمز بـ (C) إلى المنحني البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1- أ) برهن أن $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x \times (\ln x)^2 = 0$ (يمكنك وضع $x = h^2$)

ب)برهن بأن الدالة f هي مستمرة عند النقطة $x = 0$

جـ) أدرس اشتقاق الدالة f عند النقطة $x = 0$.   2) أدرس تغيرات الدالة f

3- أ) برهن بأن المستقيم $y = x$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C) في جوار $(-\infty)$

(يمكنك كتابة $f(x) - x = x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) - e^{\frac{1}{x}}$ ولحساب هذه النهاية ضع $h = \frac{1}{x}$)

ب) أحسب $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ، ماذا نستنتج ؟ .

4) أنشئ (C).

5- أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب: $\int_1^e x(\ln x)^2 dx$, $\int_1^e x \ln x dx$

ب) أحسب المساحة S المحددة بالمنحني (C) والمستقيمات : $x = 1, x = e, y = 0$

II. نعتبر التحويل S الذي يرفق بكل نقطة $M(x;y)$ ذات اللاحقة z النقطة $M'(x';y')$

ذات اللاحقة z' حيث : $\begin{cases} x' = x + y + 2 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases}$

1)عين مجموعة النقاط الصامدة للتحويل S .

2)برهن بأن التحويل S هو تشابه يطلب إعطاء عناصره المميزة .

3) عين معادلة (C') صورة المنحني (C) في المجال $]-\infty;0]$ بالتحويل S .

الحـــل

I. 1-أ) البرهان أن : $\lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^2 = 0$

لحساب $\lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^2$. نضع $x = h^2$ (لما $x \to 0^+$ فإن $h \to 0^+$)

$$\lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} x(\ln x)^2 = \lim_{h \overset{>}{\longrightarrow} 0} h^2(\ln h^2)^2 = \lim_{h \overset{>}{\longrightarrow} 0} h^2(2\ln h)^2 =$$

$$= \lim_{h \overset{>}{\longrightarrow} 0} 4h^2(\ln h)^2 = \lim_{h \overset{>}{\longrightarrow} 0} 4(h\ln h)^2 = 0$$

ب) البرهان أن الدالة f مستمرة عند النقطة $x = 0$

- استمرار الدالة f على يسار $x = 0$

$$\lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} 0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} 0} (x-1)e^{\frac{1}{x}} = 0 = f(0) \quad \left(\text{لأن } \lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} 0} e^{\frac{1}{x}} = 0 \right)$$

إذن الدالة f مستمرة على يسار $x = 0$.

- استمرار الدالة f على يمين $x = 0$

$$\lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} x(-2+\ln x)\ln x = \lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} \left[-2x\ln x + x(\ln x)^2\right] = 0$$

إذن الدالة f مستمرة على يمين $x = 0$. بما أن f مستمرة على يمين وعلى يسار $x = 0$ فالدالة f مستمرة عند النقطة $x = 0$

ج) دراسة اشتقاق الدالة f عند النقطة $x = 0$

- اشتقاق الدالة f على يسار $x = 0$

$$\lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} 0} \frac{(x-1)e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} 0} e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} = 0$$

لأن $\lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} 0} e^{\frac{1}{x}} = 0$ و $\lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} 0} \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} = \lim_{u\to -\infty} ue^u = 0$ (بوضع $u = \frac{1}{x}$)

فالدالة f قابلة الاشتقاق على يسار $x = 0$

- اشتقاق الدالة f على يمين $x = 0$

$$\lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} (-2+\ln x)\times \ln x = +\infty$$

فالدالة f غير قابلة الاشتقاق على يمين $x = 0$ ؛ إذن الدالة f غير قابلة الاشتقاق عند $x = 0$.

2) دراسة تغيرات الدالة f

مجموعة تعريف : $D_f =]-\infty;+\infty[$

حساب النهايات :

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(x-1)e^{\frac{1}{x}} = -\infty$ (لأن $\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\times(-2+\ln x)\times\ln x = +\infty$$

حساب المشتق ودراسة إشارته :

- على المجال $]-\infty;0[$:

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2}(x-1)e^{\frac{1}{x}} = \left(1-\frac{x-1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}} > 0$$

(لأن $x^2-x+1>0$ و $e^{\frac{1}{x}}>0$)

- على المجال $]0;+\infty[$:

$$f'(x) = f_2'(x) = (-2+\ln x+1)\ln x + \frac{1}{x}(-2x + x\ln x) =$$

$$= (-1+\ln x)\ln x + (-2+\ln x) = (\ln x)^2 - 2$$

$f_2'(x) = 0$ ومنه $(\ln x)^2 - 2 = 0$ ومنه $\ln x = \sqrt{2}$ أو $\ln x = -\sqrt{2}$

ومنه : $x = e^{\sqrt{2}}$ أو $x = e^{-\sqrt{2}}$

x	0		$e^{-\sqrt{2}}$		$e^{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$\ln x+\sqrt{2}$		-	0		+	+	
$\ln x-\sqrt{2}$		-		-	0	+	
$f_2'(x)$		+	0	-	0	+	

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$ $\quad$ $e^{-\sqrt{2}}$ $\quad$ $e^{\sqrt{2}}$ $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $f\left(e^{-\sqrt{2}}\right)$ ↘ $f\left(e^{\sqrt{2}}\right)$ ↗ $+\infty$

3- أ) البرهان بأن المستقيم ذو المعادلة $y=x$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C) في جوار $(-\infty)$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^{\frac{1}{x}}-x=\lim_{x\to-\infty}\left[x\times\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-e^{\frac{1}{x}}\right]$$

بوضع $h=\dfrac{1}{x}$ ومنه : لما $x\to-\infty$ فإن $h\to 0$. $\quad \lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{h\to0}e^{h}=1$

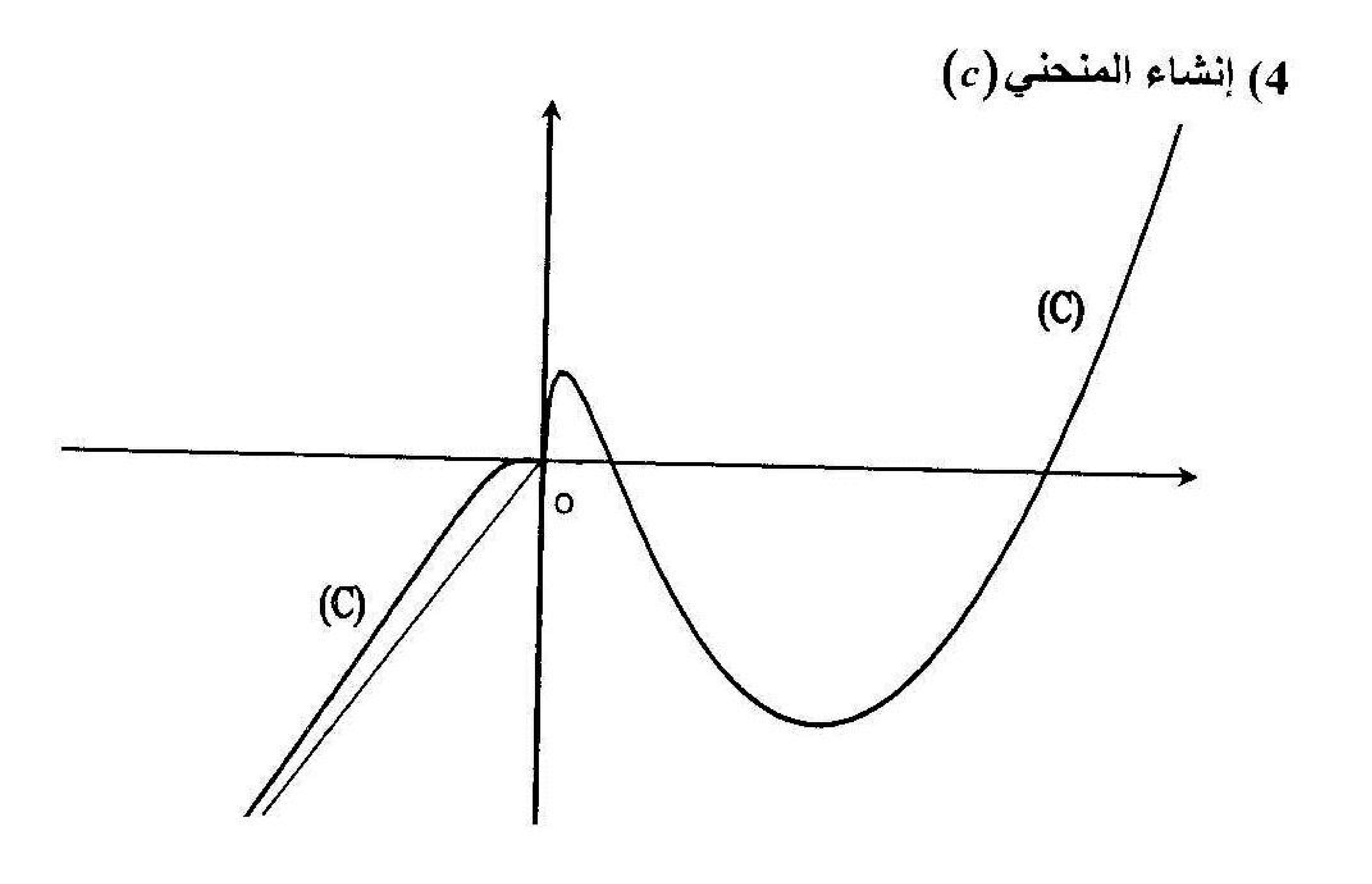
$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=1-1=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}x\times\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{e^{h}-1}{h}=1$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y=x$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C) في جوار $(-\infty)$

ب) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(-2+\ln x)\times\ln x=+\infty$ ومنه المنحني (C) له في جوا $(+\infty)$ فرع قطع مكافئ في اتجاه محور الترتيب

4) إنشاء المنحني (c)



5- أ) حساب $\int_1^e x(\ln x)^2 dx$, $\int_1^e x \ln x dx$

- حساب $\int_1^e x \ln x dx$: بوضع $u'(x) = x$ ومنه $u(x) = \frac{x^2}{2}$

$v(x) = \ln x$ ومنه $v'(x) = \frac{1}{x}$.

$$\int_1^e x \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x\right]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2+1}{4}$$

- حساب $\int_1^e x(\ln x)^2 dx$: بوضع $u'(x) = x$ ومنه $u(x) = \frac{x^2}{2}$

و $v(x) = (\ln x)^2$ ومنه $v'(x) = \frac{2\ln x}{x}$

$$\int_1^e x(\ln x)^2 dx = \left[\frac{x^2}{2}\times(\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e x\ln x dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\times(\ln x)^2\right]_1^e - \frac{e^2+1}{4} = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2+1}{4} = \frac{e^2-1}{4}$$

حساب المساحة المحددة بالمنحني (c) والمستقيمات: $x=1, x=e, y=0$

$$S = -\int_1^e f(x)dx = -\int_1^e f_2(x) = -\int_1^e\left[-2x\ln x + x\ln^2 x\right]dx =$$

$$= \int_1^e 2x\ln x dx - \int_1^e x\ln^2 x dx = 2\left(\frac{e^2+1}{4}\right) - \frac{e^2-1}{4} = \frac{1}{4}\left(e^2+3\right)(u.a)$$

II. 1) مجموعة النقاط الصامدة للتحويل S

$M(x;y)$ نقطة صامدة بالتحويل S يعني $S(M)=M$ ومنه : $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$ ومنه

$\begin{cases} y+2=0 \\ -x-1=0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} y=-2 \\ x=-1 \end{cases}$ ، إذن التحويل S له نقطة صامدة وحيدة $\varpi(-1;-2)$

2) البرهان بأن التحويل S هو تشابه يطلب إعطاء عناصره المميزة

$$z' = x'+iy' = (x+y+2)+i(-x+y-1) = x+iy-ix+y+2-i =$$

$$= x+iy-ix-i^2y+2-i = (x+iy)-i(x+iy)+2-i =$$

$$= (1-i)(x+iy)+(2-i) = (1-i)z+(2-i)$$

بما أن $z'=(1-i)z+(2-i)$ هو من الشكل $z'=\alpha z+\beta$ حيث $\alpha\in\mathbb{C}$ و $|\alpha|\neq 1$

فالتحويل S هو تشابه نسبته $|1-i|=\sqrt{2}$ وزاويته $\arg(1-i)=-\frac{\pi}{4}$ ومركزه

النقطة الصامدة $\varpi(-1;-2)$.

3) معادلة (C') صورة المنحني (C) في المجال $]-\infty;0[$ بالتحويل S

لدينا : $S(M)=M'$ حيث : $\begin{cases} x' = x+y+2 \\ y' = -x+y-1 \end{cases}$ ومنه $S^{-1}(M')=M$

حيث : $\begin{cases} x = 1/2(x' - y' - 3) \\ y = 1/2(x' + y' - 1) \end{cases}$

ونعلم ان معادلة (C) على المجال $]-\infty;0[$ هي : $y = (x-1)e^{\frac{1}{x}}$ ومنه

معادلة (C') هي : $1/2(x' + y' - 1) = (1/2x' - 1/2y' - 5/2)e^{\frac{1}{1/2(x'-y'-3)}}$

دوال مركبة مقترحة للدراسة

أدرس دراسة كاملة (تغيرات ، الفروع اللانهائية ، رسم المنحني) لكل

من الدوال الآتي:

$1) f(x) = x + 1 + \ln|e^x - 1|$, $2) f(x) = e^x + x(\ln x - 1 - e)$

$3) f(x) = e^x + \ln\frac{x-1}{x+1}$, $4) f(x) = e^{2x} + \ln\frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

$5) f(x) = e^x - (e^x - 1)\ln(e^x - 1)$, $6) f(x) = x + \ln|e^x - e^{-x}|$

$7) f(x) = e^{\frac{1}{x} + \ln|2x+1|}$, $8) f(x) = 2e^x + 2^{-x}$

$$9)\begin{cases} f(x) = x - 1 + e^{2-x} , & x \in [2;+\infty[\\ f(x) = -x + 4 + 2\ln(x-1) , & x \in]1;2[\end{cases}$$

$$10)\begin{cases} f(x) = (x^2 - 1)e^x , & x \le 0 \\ f(x) = \frac{1}{2 - \ln x} , & x > 0 \end{cases}$$

مسائــل مقـترحــة للحل

مسألة 1

نعتبر الدالة f المعرفة بـ :

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x)=-x-1+e^{x} & ; \quad \forall x\in\left]-\infty;0\right] \\ f_2(x)=x^2\ln\frac{x+1}{x} & ; \quad \forall x\in\left]0;+\infty\right[\end{cases}$$

نرمز بالرمز (c) لمنحني الدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس .

1- أ) برهن بأن الدالة f مستمرة عند النقطة ذات الفاصلة $x=0$.

ب) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند النقطة التي فاصلتها 0.

2) g دالة معرفة على المجال $\left]0;+\infty\right[$ بـ : $g(x)=-\frac{1}{x+1}+2\ln\frac{x+1}{x}$

أ) أدرس تغيرات الدالة g. ب) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $\left]0;+\infty\right[$.

3- أ) برهن بأن : $f'(x)=x\times g(x)$. ب) أدرس تغيرات الدالة f

4- أ)برهن أن في جوار $(-\infty)$ المنحني (c) له مستقيم مقارب معادلته $y=-x-1$

ب)أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c). 5) أنشئ المنحني (c)

6) λ عدد حقيقي سالب ،أحسب المساحة $S(\lambda)$ المحصورة بين المنحني (c)

والمستقيمات التي معادلاتها : $y=-x-1$, $x=\lambda$. $x=0$ ثم أحسب $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}S(\lambda)$

مسألة 2

لتكن الدالة f المعرفة بـ :

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x)=1-\frac{x^2}{e^x} & ; \quad x\le 0 \\ f_2(x)=1-\frac{x^2}{\ln x} & ; \quad x>0 \end{cases}$$

(c) هو الممثل البيياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(0;\vec{i};\vec{j})$.

1- أ) برهن بأن الدالة f مستمرة عند النقطة ذات الفاصلة $x=0$

ب) أدرس تغيرات الدالة f

2) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c). 3)أنشئ المنحني (c)

4- أ)باستعمال التكامل بالتجزئة مرتين أحسب $\int x^2 e^{-x} dx$

ب) أحسب المساحة المحصورة بين المنحني (c) والمستقيمات التي معادلاتها :

$x = -2 \ , \ x = -1 \ , \ y = 0$.

5)لتكن الدالة g المعرفة بـ : $g(x) = 1 - \dfrac{x^2}{\ln|x|}$

ا) برهن بأن g دالة زوجية . ب) باستعمال المنحني (c) أنشئ المنحني (Γ) للدالة g

مسألة 3

f دالة عددية معرفة كما يلي

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\left[1 - \ln(-x)\right]} & ; \quad x < 0 \\ (x+1)e^{-2x} - e^{x} & ; \quad x \geq 0 \end{cases}$$

(c) الممثل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس .

1- أ) أدرس اشتقاق الدالة f على يمين $x = 0$. ب) أدرس تغيرات الدالة f

2- أ) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c). ب) أنشئ المنحني (c)

3) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة : $f(x) = 2m + 1$

4-أ) باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب $\int_{\ln 2}^{1} (x+1)e^{-2x} dx$

ب) أحسب المساحة المحددة بالمنحني (c) والمستقيمات : $y = 0 \ , \ x = 1 \ , \ x = \ln 2$

5) نعتبر التحويل T الذي يرفق بكل نقطة $M(x;y)$ ذات اللاحقة z النقطة

$M'(x';y')$ ذات اللاحقة z' حيث $\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y + 1 \end{cases}$.

ا) أكتب z' بدلالة z. ب) برهن بأن التحويل T هو تشابه يطلب إعطاء عناصره المميزة

6) عين على المجال $]0;+\infty[$ معادلة صورة المنحني (c) بالتحويل T

مسألة 4

I. لتكن الدالة العددية g ذات المتغير الحقيقي x والمعرفة بـ: $g(x)=e^{\frac{x}{2}}-e^{x}$.

1) أدرس تغيرات الدالة g . 2) استنتج إشارة $g(x)$

3) نعتبر المتتالية (u_n) والمعرفة بـ : $\int_{n}^{n+1} g(x)\,dx$.

أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=u_0+u_1+....+u_n$

II. نعتبر الدالة العددية f ذات المتغير الحقيقي x والمعرفة بـ: $f(x)=\ln\left|e^{\frac{x}{2}}-e^{x}\right|$

1)أدرس تغيرات الدالة f .

2)بين أن : $\forall x\in\left]0;+\infty\right[\ :\ f(x)-x=\ln\left(1-e^{-\frac{x}{2}}\right)$

وأن : $\forall x\in\left]-\infty;0\right[\ :\ f(x)-\frac{x}{2}=\ln\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right)$.

نرمز بـ (c) لمنحني الدالة f وبـ (Δ) إلى المستقيم المقارب لـ (c) في جوار $(+\infty)$ وبـ (Δ') إلى المستقيم المقارب للمنحني (c) في جوار $(-\infty)$.

3-أ) عين معادلتي المستقيمين (Δ) و (Δ') . ب) أدرس وضعية (c) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') . 4) أنشئ (c) في معلم متعامد ومتجانس .

5) لتكن الدالة g اقتصار الدالة f على المجال $\left]0;+\infty\right[$.

بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} يطلب إعطاء جدول تغيراتها وإنشاء منحنيها (Γ)

اختبر معلوماتك

الـدوال الناطـقة

مسألة 1

لتكن f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x والمعرفة بـ : $f(x)=\dfrac{-4x+8}{x^2-4x+5}$

نسمي (c) المنحني البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أدرس تغيرات الدالة f . 2) عين إحداثيتي ϖ نقطة تقاطع المنحني (c) مع محور الفواصل ثم بين أن ϖ هي مركز تناظر للمنحني (c).

3- أ) أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (c) عند النقطة ϖ .

ب) أدرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى (Δ) ثم استنتج أن النقطة ϖ هي نقطة انعطاف المنحني (c). 4) أرسم المنحني (c) والمماس (Δ) (وحدة الطول $2cm$) .

5) حل بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m المعادلة ذات المجهول x :
$mx^2-4(m-1)x+5m-8=0$. 6) نعتبر الدالة g المعرفة كما يلي :

$g(x)=\dfrac{-4|x|+8}{x^2-4|x|+5}$ وليكن (Γ) منحنيها البياني في المعلم السابق .

أ) بين أن g هي دالة زوجية . ب) باستعمال المنحني (c) أشرح كيف يمكن إنشاء (Γ).

مسألة 2

ليكن كثير الحدود $p(x)$ حيث : $p(x)=-x^3+6x^2-13x+8$

1) أدرس إشارة $p(x)$.

2) f دالة عددية معرفة بـ : $f(x)=-x+1+\dfrac{x-1}{(x-2)^2}$. نسمي (c) الممثل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$. أ) عين مجموعة تعريف الدالة f .

ب) أحسب $f'(x)$ ثم تحقق أن $f'(x)=\dfrac{p(x)}{(x-2)^2}$ واستنتج تغيرات الدالة f .

ج) بين أن المنحني (c) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعيينه .

د) أدرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى (Δ).

د) أكتب معادلة المماس للمنحني (c) عند النقطة ذات الفاصلة 3.

3) أرسم المنحني (c) في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

4) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=m$.

مسألة 3

f دالة عددية ذات المتغير الحقيقي x معرفة بـ: $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$.

نرمز بـ (c) إلى الممثل البياني لها في معلم متعامد و متجانس.

1- أ) عين مجموعة تعريف الدالة f . ب) بين أن من اجل كل $x\in D_f$:

$f(x)=\alpha x+\dfrac{\beta}{x-1}+\dfrac{\delta}{x+1}$ حيث α,β,δ أعداد حقيقية يطاب يعيينها .

2)أدرس تغيرات الدالة f . 3- أ)بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (c) . ب) أدرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى (Δ).

4) أنشئ المنحني (c) والمستقيم (Δ).

5) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $x^3-mx^2=m$. 6- أ) عين على المجال $]0;1[$ دالة أصلية للدالة f .

ب) أحسب $S(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (c)، والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلاتهما $x=\lambda$, $x=0$ حيث $0<\lambda<1$.

جـ) أحسب $\lim\limits_{\lambda\to 1} S(\lambda)$

الـدوال الجـذريـة

مسألة1

f دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة بـ : $f(x)=x+1-2\sqrt{|x+1|}$ وليكن (c) منحنيها البياني في معلم متعامد ومتجانس . 1) أكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة ثم أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. 2)أدرس قابلية الاشتقاق عند النقطة $x=0$ وفسر هندسيا النتيجة . 3) أحسب $f'(x)$ في المجالات التي تقبل فيها الدالة f الاشتقاق

وحدد إشارة $f'(x)$ ثم أعطي جدول تغيرات الدالة f

4) بين أن المنحني (c) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $x_0 \in]0;1[$

5) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c). 6) أنشئ المنحني (c)

مسألة2

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x + \sqrt{|x^2 - 4|}$ وليكن (c) المثل البياني لها

في معلم متعامد ومتجانس $(0;\vec{i};\vec{j})$.

1- أ) أدرس استمرارية واشتقاق الدالة f على $\mathbb{R}$

ب) أحسب $f'(x)$ في كل مجال أين تكون فيه الدالة f قابلة الاشتقاق .

2- أ) برهن أن $\sqrt{4x^2 - 1} + 4x < 0$ من أجل كل $x \in]-\infty; -1/2[$

وأن $\sqrt{4x^2 - 1} + 4x > 0$ من أجل كل $x \in]-1/2; -1/2\sqrt{5}[$

ب) استنتج إشارة $f'(x)$. 3- أ) أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

ب) أعطي جدول تغيرات الدالة f .

4-أ) أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) + x]$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 3x]$ واستنتج أن المنحني (c)

يقبل مستقيمين مقاربين معادلاتهما $y = -x$ و $y = 3x$.

ب) أنشئ المنحني (c). 5) نعتبر الدالة g المعرفة بـ : $g(x) = |x| + \sqrt{x^2 - 4}$

نسمي (Γ) المنحني البياني لها في المعلم السابق. أ) عين مجموعة تعريف الدالة g

ب) برهن بأن الدالة g زوجية . جـ) باستعمال المنحني (c) أشرح كيف يمكن إنشاء

المنحني (Γ).

مسألة3

نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1$ وليكن (γ) المنحني الممثل

للدالة f في معلم متعامد ومتجانس . 1) أدرس تغيرات الدالة f

2- أ) عين معادلة المماس لـ (γ) عند النقطة $(0; f(0))$.

ب) حدد نقاط تقاطع (γ) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$

3) أنشئ (γ) والمستقيم (Δ) .

الـدوال اللـوغـارتمية

مسالة 1

I. لتكن الدالة g المعرفة بـ : $g(x)=x^2-1+2\ln x$.   1)أدرس تغيرات الدالة g .

2) برهن بأن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد $x_0=1$.

3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$.

1) برهن بأن على المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)$ و $g(x)$ لهما نفس الإشارة.

2) أدرس تغيرات الدالة f. نرمز بـ (c) و (Γ) للمنحنيين الممثلين للدالتين f

و $x\to\ln x$ في معلم متعامد ومتجانس $(0;\vec{i};\vec{j})$ (طول الوحدة $4cm$).

3- أ) أدرس وضعية (c) بالنسبة إلى (Γ).   ب) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c).

4) أنشئ المنحني (c) والمنحني (Γ).

5- أ) h دالة عددية معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $h(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$.

أحسب $h'(x)$ واستنتج دالة أصلية على المجال $]0;+\infty[$ للدالة : $x\to\dfrac{\ln x}{x^2}$

ب) احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بمجموعة النقاط $M(x;y)$ حيث :

$$\begin{cases}1\le x\le 4\\ f(x)\le y\le \ln x\end{cases}$$

مسألة 2

لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x)=\dfrac{2x+1-\ln|x+1|}{x+1}$ وليكن (c) المنحني البياني لها

في معلم متعامد ومتجانس $(0;\vec{i};\vec{j})$.   1- ا) تحقق أن من أجل كل $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ فإن:

$f(x)=2-\dfrac{1+\ln|x+1|}{x+1}$.   ب)أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

جـ) أحسب $f(0)$, $f(-2)$, $f(-3)$.

2) أدرس تغيرات الدالة f . 3- أ) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c) .

ب) عين إحداثيتي نقطة تقاطع (c) مع المستقيم المقارب الأفقي .

جـ) برهن بأن المنحني (c) يقطع $(x'x)$ في نقطة وحيدة $x_0 \in]-2;-1[$.

4) أنشئ المنحني (c) .

5) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة :

$$\ln|x+1| + 2(m-1)(x+1) + 1 = 0$$

6) نعتبر التحويل S الذي يرفق بكل نقطة $M(x;y)$ ذات اللاحقة z النقطة $M'(x';y')$ ذات اللاحقة z' حيث : $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x - y + 2 \end{cases}$

أ) أكتب z' بدلالة z . ب) استنتج طبيعة التحويل S وعناصره المميزة .

جـ) أكتب معادلة صورة المنحني (c) بالتحويل S .

مسألة 3

I. نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 \ln x$.

نسمي (c) المنحني البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ .1) أدرس تغيرات الدالة f . 2) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c) .

3- ا) أثبت أن المنحني (c) يقبل نقطة انعطاف A يطلب تعيين إحداثياتها .

ب) أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (c) عند النقطة A .

4- أ) عين إحداثيتي نقطة تقاطع للمنحني (c) مع حامل محور الفواصل .

ب) أرسم المنحني (c) والمستقي (Δ) .

II. لتكن الدالة g المعرفة بـ : $\begin{cases} g(x) = \frac{1}{4}x^2 \ln x^2 - \frac{3}{4}x^2 \ , \ x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

نرمز بـ (Γ) للمنحني البياني للدالة g .

1- ا) ادرس استمرارية الدالة g عند النقطة $x = 0$.

2) أحسب $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x)}{x}$. هل الدالة g قابلة الاشتقاق عند النقطة $x = 0$ ؟

2) استنتج دون دراسة الدالة g رسم المنحني (Γ).

3) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة :

$x^2 \ln x^2 - 3x^2 = m$. 4- أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب $\int_1^e x^2 \ln x dx$.

ب) أحسب المساحة S للحيز المستوي المحدد بالمنحني (Γ)ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلاتهما : $x = 1$ و $x = e$

مسألة 4

1) نعتبر الدالة f العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

$f(x) = \frac{x+1}{x+2} + \ln|x+1|$. أ) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

ب) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجال تعريفها .

جـ) أدرس تغيرات الدالة f .

2) ليكن (c)منحني الدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

أ) بين أن للمنحني (c)نقطة انعطاف ϖ يطلب تعيين إحداثياتها .

ب) أكتب معادلة المماس عند النقطة التي فاصلتها (-2)وعند النقطة ϖ .

جـ) أدرس الفروع اللانهائية وعين المستقيمات المقاربة للمنحني (c).

د) أنشئ المنحني (c). 3- أ) استنتج مما سبق إشارة $f(x)$ على D_f .

ب) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (c)والمستقيمات التي معادلاتها :

$x = \lambda$, $x = -2$, $y = 0$ حيث $\lambda < -2$

4) نعتبر الدالة g للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

$\begin{cases} g(x) = e^{(x+2)\ln|x+1|} & , x \neq -1 \\ g(-1) = 0 \end{cases}$ ، ليكن (γ)منحني الدالة g في معلم جديد متعامد ومتجانس $\left(o';\vec{i'};\vec{j'}\right)$. أ) بين أن لكل $x \neq (-1)$ لدينا : $g(x) = |x+1| e^{(x+1)\ln|x+1|}$

ب)أدرس استمرارية وقابلية الاشتقاق عند القيمة $x = (-1)$

جـ) أدرس تغيرات الدالة g (يمكنك استعمال السؤال 3)

د) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (γ). هـ) أرسم المنحني (γ).

مسألة 5

f دالة عددية للمتغير الحقيقي x حيث : $f(x)=x+\frac{2}{x}-3-\ln x$.

ليكن (c) منحني الدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أدرس تغيرات الدالة f والفروع اللانهائية للمنحني (c).

2- أ)أكتب معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $(+1)$.

ب) بين أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]2\sqrt{3};4[$.

جـ) استنتج حل للمتراجحة : $x+\frac{2}{x}-\ln x\geq\frac{9}{2}-2\ln 2$.

3) أرسم المنحني (c) والمماس (Δ).

4- أ) أحسب الدالة المشتقة للدالة g حيث : $g(x)=-x+x\ln x$ من أجل $x>0$

ب) استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$

ج) λ عدد حقيقي حيث : $0<\lambda<1$. $S(\lambda)$ المساحة المحدودة بالمنحني (c)

وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلاتهما : $x=2$ و $x=\lambda$.

د) أحسب $S(\lambda)$ بدلالة λ ثم $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} S(\lambda)$.

مسألة6

I. لتكن الدالة العددية f المعرفة بـ : $f(x)=\frac{e}{x(\ln x-1)^2}$ وليكن (c) المنحني

البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$. 1) أدرس تغيرات الدالة f .

2)ادرس الفروع اللانهائية للمنحني (c) للدالة f .

3) اكتب معادلة المماس للمنحني (c) عند النقطة $x_0=1$. 4) أنشئ المنحني (c).

5- أ) عين دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;e[$. ب) استنتج حساب $S(\lambda)$ مساحة

الحيز المستوي المحدد بالمنحني (c) والمستقيمات التي معادلاتها:

$(0<\lambda<1)$ $x=\lambda$, $x=1$, $y=0$. جـ) أحسب $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} S(\lambda)$

د) عين قيمة λ حتى تكون $S(\lambda)=\frac{e}{3}$.

II. ليكن h التحاكي الذي مركزه o (مبدأ المعلم) ونسبته $\frac{1}{e}$ والذي يرفق بكل نقطة $M\left(x;y\right)$ من المستوي النقطة $M'\left(x';y'\right)$ ولتكن z و z' لاحقتي كل من M و M'.

1) أكتب z' بدلالة z ثم استنتج x',y' بدلالة x,y.

2) أثبت أن معادلة $\left(\Gamma\right)$ صورة المنحني $\left(c\right)$ بالتحويل h هي : $y=\frac{1}{e}\times\frac{1}{x\ln^2 x}$

مسألة 7

لتكن الدالة f المعرفة كما يلي :
$$\begin{cases} f_1\left(x\right)=\left(1-x\right)\ln^2\left(1-x\right) \ , \ \ x\leq 0 \\ f_2\left(x\right)=x^2\ln\frac{x+1}{x} \quad , \quad x>0 \end{cases}$$

نرمز بـ : $\left(c\right)$ لمنحني الدالة f في معلم متعامد ومتجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1- أ) بين أن الدالة f مستمرة عند النقطة $x=0$. ب) هل الدالة f قابلة الاشتقاق عند $x=0$ ؟ 2- أ) أدرس على المجال $\left]0;+\infty\right[$ تغيرات الدالة g المعرفة بـ: $g\left(x\right)=-\frac{1}{x+1}+2\ln\frac{x+1}{x}$. ب) استنتج إشارة $g\left(x\right)$ على المجال $\left]0;+\infty\right[$.

3- أ) أدرس تغيرات الدالة f (ملاحظة : $f_2'\left(x\right)=x\times g\left(x\right)$

ب) أحسب $f\left(2\right)$, $f\left(1\right)$, $f\left(-e+1\right)$. 4- أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}$ وأعطي تفسير هندسيا للنتيجة. ب) برهن أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f_2\left(x\right)-x+\frac{1}{2}\right]=0$ ثم استنتج معادلة المستقيم المقارب للمنحني $\left(c\right)$ في جوار $\left(+\infty\right)$

5) أنشئ المنحني $\left(c\right)$.

6) باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب : $\int_1^e x^2\ln x dx$, $\int_1^e x^2\ln\left(x+1\right)dx$

ب) استنتج حساب المساحة الحيز المستوي المحصورة بين المنحني $\left(c\right)$ والمستقيمات التي معادلاتها : $x=e$, $x=1$, $y=0$

مسألة 8

I. لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x)=(x+1)\ln\frac{1}{|x+1|}+(x+2)$ وليكن

(c) المنحني البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ (طول الوحدة $2cm$)

1) أدرس تغيرات الدالة f

2) أحسب $f(-2)$ ، ثم برهن على وجود عدد حقيقي $\alpha\in]2;3[$ حيث $f(\alpha)=0$

3) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c) للدالة f .

4) أنشئ المنحني (c).

5) برهن بأن المنحني (c) له في نقطتين مماسين موازين للمستقيم (D) ذي المعادلة $x+y-1=0$.

6- أ) عين دالة أصلية للدالة $x\to(x+1)\ln(x+1)$

ب) أحسب مساحة الحيز المستوي الممثل لمجموعة النقاط $M(x;y)$ حيث :

$0\le x\le 2$ و $0\le y\le f(x)$.

II. نعتبر التحويل T_α الذي يرفق تكل نقطة $M(x;y)$ من المستوي النقطة

$M'(x';y')$ حيث : $(\alpha\in\mathbb{R})$, $\begin{cases}x'=\alpha x-1\\ y'=(2\alpha+1)y+1\end{cases}$

أ) عين مجموعة قيم α من أجلها يكون T_α تقابلا .

ب) برهن أن التحويل T_{-1} $(\alpha=-1)$ هو تناظر مركزي يطلب تعيين مركزه

جـ) أوجد معادلة المنحني (Γ) صورة المنحني (c) بالتحويل T_{-1}

مسألة 9

نعتبر الدالة العددية g المعرفة بـ : $g(x)=x^2-\ln x$.

1) أدرس تغيرات الدالة g وتحقق أن : $g(x)\ge 1$ من أجل كل $x\in]0;+\infty[$

2) لتكن الدالة العددية f ذات المتغير الحقيقي x والمعرفة بـ :

$f(x)=1-x-\frac{2}{x}(1+\ln x)$ وليكن (c) المنحني البياني لها في معلم متعامد

ومتجانس. برهن أن من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ لدينا : $f'(x)=\frac{-g(x)}{x^2}$

3) أدرس تغيرات الدالة f . 4- أ) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c).

ب) أدرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل .

5) (D) هو المماس للمنحني (c) عند النقطة التي فاصلتها x_0 .

إذا كان ميل (D) هو (-1) أكتب عندئذ معادلة المستقيم (D).

6) بين أن (c) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها .

7) أرسم المماس (D) والمنحني (c). 8) ناقش بيانيا وحسب الوسيط الحقيقي m وجود وعدد نقاط تقاطع (c) مع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة : $y=-x+m$

9) أحسب مساحة الحيز المستوي المحددة بالمنحني (c) والمستقيمات التي معادلاتها :

$$.\ y=-x+1 \quad , \quad x=\frac{1}{e} \quad , \quad x=1$$

مسألة 10

I. لتكن الدالة العددية g المعرفة بـ : $g(x)=-x+1-2\ln x$

1) ادرس تغيرات الدالة g . 2) أحسب $g(1)$ واستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

II. نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=\dfrac{x+\ln x}{x^2}$ وليكن (c) المنحني البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) احسب $f'(x)$ وبرهن أن إشارتها هي إشارة $g(x)$. 2) أدرس تغيرات الدالة f

3- أ) برهن أن $f(x)>0$ من أجل كل $x\in[1;+\infty[$.

ب) برهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد $\alpha\in]1/2;1[$

جـ) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c) . 4) أنشئ المنحني (c).

5- أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة احسب : $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$.

ب) احسب المساحة المحصورة بين المنحني (c) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلاتهما : $x=1$ و $x=e$.

III. نعتبر التحويل T الذي يرفق بكل نقطة $M(x;y)$ ذات اللاحقة z النقطة $M'(x';y')$ ذات اللاحقة z' حيث : $z'=-z+1+2i$. 1) ما طبيعة التحويل T وما هي عناصره المميزة . عين معادلة صورة المنحني (c) بالتحويل T .

مسألة 11

I. g دالة عددية معرفة بـ : $g(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}$. 1- أ) أدرس تغيرات الدالة g

ب) برهن على وجود عدد حقيقي $]1;e[\ni \alpha$ حيث $g(\alpha)=0$.

جـ) تحقق أن $1,7<\alpha<1,8$.

2) برهن أن $\alpha\ln\alpha=1$ وأعطي إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II. لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x)=\ln x+x-x\ln x$.

1- أ) تحقق أن $f(x)=x\left(\dfrac{\ln x}{x}+1-\ln x\right)$ واستنتج حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب) أحسب $f'(x)$ وبرهن أن $f'(x)=-g(x)$ من أجل كل $x\in]0;+\infty[$

2) أدرس تغيرات الدالة f . 3- أ) برهن أن : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha}+\alpha-1$

ب) أعطي قيمة تقريبية لـ $f(\alpha)$ من أجل $\alpha=1,7$.

3) أنشئ المنحني (c) في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ (طول الوحدة $2cm$) .

4- أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب : $\int_1^e x\ln x\,dx$, $\int_1^e \ln x\,dx$

ب) استنتج حساب $\int_1^e f(x)\,dx$. جـ) أعطي تفسيرا هندسيا لـ $\int_1^e f(x)\,dx$.

مسألة 12

I. لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x)=1-\dfrac{1}{x}+\ln x$. 1) أدرس تغيرات الدالة f .

2) أحسب $f(1)$ وأدرس إشارة $f(x)$ حسب قيم x .

3) نعتبر الدالة g المعرفة بـ : $g(x)=|x-1|\ln x$.

أ) أحسب $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. ب) أدرس اشتقاق الدالة g عند النقطة $x_0=1$

جـ) احسب $g'(x)$ وأدرس إشارتها على كل من المجالين : $]1;+\infty[$, $]0;1[$

د) أعطي جدول تغيرات الدالة g . 4) أنشئ المنحني (c) الممثل البياني للدالة g

في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ (طول الوحدة $2cm$).

5) m وسيط حقيقي ، نعتبر المستقيم (D_m) الذي يمر بالنقطة $A(0;1)$ ومعامل توجيهه m . أ) أعطي معادلة (D_m) . ب) عين حسب قيم m عدد نقاط (c) و (D_m). 6- أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة عين على المجال $]1;+\infty[$ دالة أصلية للدالة : $x \to |x-1|\ln x$.

ب)أحسب مساحة الحيز المستوي لمجموعة النقط $M(x;y)$ حيث $\begin{cases} 1 \le x \le e \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$

II. نعتبر المعادلة التفاضلية $y' = 2y$. 1) عين الحل العام لهذه المعادلة .

2) عين الحل الخاص الذي يحقق $y'\left(\frac{1}{2}\right) = 2e$

مسألة 13

لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 2 - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ وليكن (c) المنحني البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$. 1- أ) تحقق أن من أجل $x \in D_f$ لدينا :

$f'(x) = \frac{(x+1)(-x^2+2)}{x(x+2)}$. ب) أدرس تغيرات الدالة f .

2- أ) أثبت أن المنحني (Γ) ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 2$ هو منحني مقارب للمنحني (c). ب) أدرس وضعية المنحنيين (c) و (Γ).

جـ) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c). د) أثبت ان المنحني (c) يقطع محور الفواصل في ثلاثة نقاط . 3) أنشئ المنحني (c).

4) λ عدد حقيقي حيث $0 < \lambda < 1$. أ) أحسب المساحة $S(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (c) و (Γ) والمستقيمين اللذين معادلاتهما : $x = 1$ و $x = \lambda$.

ب) أحسب $\lim_{\lambda \to 0^+} S(\lambda)$. 5) نعتبر التحويل S الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z' = -z - 2$.

أ) عين طبيعة التحويل S وعناصره المميزة .

ب) جد معادلة المنحني (c') صورة المنحني (c) بالتحويل S .

مسألة 14

g دالة عددية معرفة بـ : $g(x) = x^2 - 2\ln x$.

1) أدرس تغيرات الدالة g واستنتج إشارة $g(x)$. نعتبر الدالة f المعرفة بـ :

$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}(1+\ln x)$. نرمز بـ (c) للمنحي الدالة f في معلم متعامد و متجانس.

2-أ) أحسب $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim_{x\to +\infty} f(x)$. ب) أدرس تغيرات الدالة f .

3- أ) برهن بأن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = \frac{x}{2}$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c).

ب) أدرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى (D) على المجال $]0; +\infty[$.

جـ) برهن بأن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد $\alpha \in]0,34; 0,35[$.

4) انشئ المنحني (c). 5) أحسب المساحة المحددة بالمنحني (c) والمستقيمات التي

معادلاتها : $x = e$, $x = 1$, $y = \frac{x}{2}$.

6) نعتبر التحويل S الذي يرفق بكل نقطة $M(x; y)$ ذات اللاحقة z النقطة

$M'(x'; y')$ ذات اللاحقة z' حيث : $\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$.

أ) أكتب z' بدلالة z . ب) اكتب معادلة المنحني (Γ) صورة المنحني (c) بالتحويل S.

مسألة 15

I. لتكن الدالة g المعرفة بـ : $g(x) = -\frac{1}{x+2} + \ln\left|\frac{x+2}{x+1}\right|$.

1) أدرس تغيرات الدالة g . 2) أثبت ان للمعادلة $g(x) = 0$ حل وحيد α حيث :

$(-1,22) < \alpha < (-1,21)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II. لتكن الدالة f المعرفة كم يلي : $f(x) = (x+1)\times\ln\left|\frac{x+2}{x+1}\right|$ وليكن (c) منحناها

البياني في مستو منسوب إلى معلم و متعامد و متجانس .

1) أدرس تغيرات الدالة f . 2- أ) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c).

ب) أكتب معادلة المماس (D) للمنحني (c) عند النقطة التي ترتيبها معدومة .

ج) أثبت ان المنحني (c) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ عند نقطة وحيدة فاصلتها

$\beta \in]-1,79;-1,78[$. د) أثبت أن $f(\alpha) = 1 - \frac{1}{2+\alpha}$ ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$.

3) حل بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = m$

4- أ)عين ألأعداد الحقيقية a,b,c حيث : $\frac{x^2+2x}{x^2+3x+2} = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$

ب) باستعمال المكاملة بالتجزئة أوجد دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$

جـ) أحسب المساحة S للحيز المستوي المحدود بالمنحني (c) والمستقيمات التي

معادلاتها : $x = 0$, $x = -\frac{1}{2}$, $y = 0$

الدوال الأسية

مسألة 1 :

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $g(x) = -1 + (1-x)e^{-x}$

1) أ- احسب $g'(x)$ وأدرس إشارتها. ب- برهن أن $\lim g(x) = -1$ لما $x \to +\infty$.

جـ - أعط جدول تغيرات الدالة g و احسب $g(0)$.

د- برهن أن لكل x من المجال $[0;+\infty[$ تكون $g(x) \leq 0$.

II) ليكن الدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x) = xe^{-x} - x + 4$ و ليكن

(C) منحنيها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

(طول الوحدة $2cm$)

1) أ- تحقق أنه من أجل كل x من المجال $[0;+\infty[$ تكون $f'(x) = g(x)$.

ب- أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0;+\infty[$.

2) أ- برهن بأن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 4$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C)

ب – أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

جـ - أكتب معادلة المماس للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة $x = 0$.

3) أنشئ المنحني (C) .

4)أ- (D) مستقيم معادلته : $y=-\frac{x}{2}+4$ ، أنشئ (D) .

ب - عين نقاط التقاطع للمنحني (C) مع (D).

جـ- أدرس على المجال $]0;+\infty[$ إشارة $f(x)-\left(-\frac{x}{2}+4\right)$ و استنتج وضعية (C) بالنسبة إلى (D).

5) لتكن الدالة $h(x)$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=(-x-1)e^{-x}$

أ- احسب $h'(x)$.

ب - استنتج على المجال $]0;+\infty[$ دالة أصلية للدالة : $x\mapsto xe^{-x}-\frac{x}{2}$.

جـ - احسب بـ: cm^2 مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحني (C) و المستقيم (D) و المستقيمين الذين معادلتاهما $x=0$ و $x=\ln 2$.

مسألة 2 :

I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي: $f(x)=2e^{1-\frac{x}{2}}-e^{-x}$ و ليكن (C) المنحني البياني الممثل للدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ- تحقق أن $f(x)=e^{-\frac{x}{2}}\left(2e-e^{-\frac{x}{2}}\right)$. ب- أدرس تغيرات الدالة f .

2) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (C) .

3) أ- أكتب معادلة المماس للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

ب- احسب $f(-3)$ و عين إحداثيتي نقطة تقاطع (C) مع (xx') .

4) ارسم المنحني (C) .

5) λ عدد حقيقي أكبر من (2-). أ- احسب المساحة $S(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) و المستقيمات التي معادلاتها $x=-2$ و $x=\lambda$ و $y=0$.

ب- عين قيمة λ التي من أجلها $S(\lambda)=2e+1$.

جـ احسب $\lim S(\lambda)$ لما $\lambda \to +\infty$.

6) لتكن الدالة العددية h المعرفة كما يلي: $h(x) = 2e^{1+\frac{|x|}{2}} - e^{|x|}$

أ – بين أن الدالة h هي دالة زوجية. ب – باستخدام المنحني (C) ارسم المنحني (Γ) الممثل للدال h .

II) نعتبر التحويل T الذي يرفق بكل نقطة $N(x;y)$ ذات اللاحقة z النقطة $N'(x';y')$ ذات اللاحقة z' حيث $z' = -iz + 1 - i$.

1) ما طبيعة التحويل T ؟ حدد عناصره المميزة.

2) أكتب العبارة التحليلية للتحويل T .3) عين معادلة صورة المنحني (C) بالتحويل T .

مسألة 3 :

I) لتكن الدالة العددية المعرفة بـ: $f(x) = \dfrac{2e^{2x} - e^{e}}{e^{2x} - e^{x} + 1}$ و ليكن (C) منحنيها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (طول الوحدة $2cm$)

1) أدرس تغيرات الدالة f . 2) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (C) .

3) بين أن $h(1;0)$ هي مركز تناظر المنحني (C).

4) أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (C) عند النقطة h .

5) أ- عين إحداثيتي النقطة A نقطة تقاطع (C) مع محور الفواصل .

ب – عين فاصلة B النقطة من (C) ذات الترتيبة 2 .

6) ارسم (Δ) و (C)ثم عين حسب قيم x ، إشارة $f(x)$.

II) لتكن الدالة g المعرفة بـ: $g(x) = -1 + \ln(e^{2x} + e^{x} + 1)$ و ليكن (Γ) تمثيلها البياني.

1) عين مجموعة تعريف الدالة g .

2) بين أن لكل x من D_g : $g'(x) = f(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغيرات الدالة g.

3) برهن أن لكل x من D_g : $g(x) = 2x - 1 + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$ ، ثم استنتج أن (Γ) يقبل مستقيما مقاربا (D) معادلته $y = 2x - 1$ في جوار $(+\infty)$.

4) احسب $g(0)$ و $g(1)$ ، ثم ارسم (D) و (Γ).

5) احسب بالسنتيمتر المربع المساحة $S(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) و المستقيمات التي معادلاتها $y=0$ ، $x=-\ln 2$ ، $x=\lambda$. حيث $\lambda<-\ln 2$.

- احسب $\lim S(\lambda)$ لما $\lambda \to -\infty$.

مسألة 4 :

I) لتكن الدالة g المعرفة بـ: $g(x)=1-(1+x)e^{-\frac{1}{2}x}$ و ليكن (C) منحنيها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أدرس تغيرات الدالة g .

2) أ- أثبت أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2<\alpha<3$ و فسر هندسيا النتيجة .

ب- احسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x .

3) عين f الدالة الأصلية للدالة g على $\mathbb{R}$ و التي تأخذ القيمة 6 من أجل $x=0$.

II) نعتبر الدالة العددية f والمعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x+2(x+3)e^{-\frac{1}{2}x}$

و ليكن (C') منحنيها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أدرس تغيرات الدالة f .

2) أ- أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (C').

ب – أثبت أن المنحني (C') يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها و كتابة معادلة المماس للمنحني (C') عندها.

جـ - أثبت أن المنحني (C') يقطع (xx') في نقطة وحيدة فاصلتها β حيث : $\beta \in]-3;-2[$.

د- اثبت أن $f(\alpha)=\alpha+2+\frac{4}{\alpha+1}$ ثم عين حصرا للعدد $f(\alpha)$.

3) أنشئ المنحني (C') . 4) ليكن λ عدد حقيقي موجب تماما . احسب $S(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C') و المستقيم المقارب المائل (Δ) للمنحني (C') و المستقيمين $x=0$ و $x=\lambda$ ، ثم احسب $\lim S(\lambda)$ لما $\lambda \to +\infty$.

مسألة 5 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بـ: $f(x)=\dfrac{3e^{-x}+1}{\left(e^{-x}+1\right)^2}$ و ليكن (C) منحنيها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (طول الوحدة $2cm$) .

1) أدرس تغيرات الدالة f .

2) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (C) .

3) أنشئ المنحني (C) .

4) أ- تحقق أن : لكل عدد حقيقي x فإن $f(x)=1-\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}+\dfrac{2e^{-x}}{\left(e^{-x}+1\right)^2}$.

ب- ليكن λ عدد حقيقي موجب تماما . احسب $S(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) و المستقيمات التي معادلاتها $y=1$ ، $x=0$ ، $x=\lambda$.

جـ - احسب $\lim S(\lambda)$ لما $\lambda\to+\infty$.

5) نعتبر التناظر المركزي S الذي مركزه النقطة $\omega\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

أ- أوجد العبارة المركبة و العبارة التحليلية للتحويل S .

ب- أثبت أن صورة المنحني (C) بالتحويل S هم المنحني (Γ) الممثل للدالة g المعرفة بـ: $g(x)=\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^2}$.

مسألة 6 :

I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة بـ: $\begin{cases} f(x)=(2x-1)e^{\frac{1}{x}} & (x\neq 0) \\ f(0)=0 \end{cases}$ و

ليكن (C) منحنيها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ - أدرس استمرارية الدالة f . ب – أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين و على يسار $x=0$.

20) أدرس تغيرات الدالة f .

3) أ- برهن أن $\lim_{|x|\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=1$. ب- استنتج أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=2x+1$ هو مستقم مقارب للمنحني (C).

جـ - أكتب معادلة المماس للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{1}{2}$.

4) أنشئ المنحني (C).

5) أ -عين العدد الحقيقي α بحيث تكون الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بـ: $g(x)=\alpha x^2 e^{\frac{1}{x}}$ دالة أصلية للدالة f .

ب- احسب بـ: cm^2 المساحة المحددة بالمنحني (C) و المستقيمات : $y=0$ و $x=\frac{1}{2}$ و $x=2$.

II) h دالة عددية معرفة بـ:
$$\begin{cases} h(x)=e^{\frac{1}{x}+\ln|2x+1|} & x\neq 0 \text{ لما} \\ h(0)=0 \end{cases}$$

1) أكتب $h(x)$ بدلالة $g(x)$. 2) استنتج إنشاء المنحني (C') للدالة h .

مسألة 7 :

I) لتكن الدالة g المعرفة بـ: $g(x)=\frac{e^x}{1+e^x}-\ln(1+e^x)$

1) أدرس تغيرات الدالة g ثم استنتج إشارة $g(x)$.

2) أ- برهن أن $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-1+x\right]=0$ ماذا تستنتج؟

ب- برهن أن g هي تقابل للمجال $]-\infty\ ;\ +\infty[$ على المجال $]-\infty\ ;\ 0[$.

3) أنشئ المنحني (C) للدالة g .

II) نعتبر الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=e^{-x}\times\ln(1+e^x)$.

1) أ- أدرس اشتقاق الدالة f على $\mathbb{R}$.

ب- برهن أن لكل عدد x من $\mathbb{R}$ فإن : $f'(x)=e^{-x}\times g(x)$.

جـ - احسب $\lim_{|x|\to+\infty} f(x)$ (لحساب النهايات ضع $z=e^x$)

د- أدرس تغيرات الدالة f . 2) أنشئ المنحني (Γ) للدالة f .

3) نضع $S(\lambda)=\int_0^{\lambda} f(x)dx$. أ- تحقق من وجود $S(\lambda)$.

ب- باستعمال التكامل بالتجزئة ، احسب $S(\lambda)$ (ملاحظة : $\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{1}{1+e^{x}}$)

جـ - احسب $\lim S(\lambda)$ لما $\lambda\to+\infty$.

III) نعتبر المعادلة التفاضلية: $y'+y=\frac{1}{1+e^{x}}$ ......(1)

1) تحقق بأن f هي حل للمعادلة (1) .

2) نضع $y=f-k$ حيث k دالة عددية للمتغير x ، برهن أنه إذا كان y حل لمعادلة

(1) فإن الدالة k تكون حلا للمعادلة (2)....... $k'+k=0$

3) حل المعادلة (1) و استنتج حلا للمعادلة (2) .

مسألة 8 :

I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة بـ:

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x)=-x-1+e^{x} & : x\in\left]-\infty\,;\,0\right] \text{ لما} \\ f_2(x)=x^2\times\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) & : x\in\left]0;+\infty\right[\text{ لما} \end{cases}$$

1) أ- احسب $f(0)$ و برهن أن f مستمرة عند النقطة $x=0$.

ب – هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة $x=0$ ؟

2) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $\left]0;+\infty\right[$ بـ:

$g(x)=-\frac{1}{x+1}+2\ln\frac{x+1}{x}$.

أ- أدرس تغيرات الدالة g . ب- استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $\left]0;+\infty\right[$.

3) أ- برهن أن $f_2'(x)=x\times g(x)$. ب- أدرس تغيرات الدالة f .

4)أ- برهن أن في جوار $(-\infty)$ المنحني (C) للدالة f يقبل مستقيما مقاربا (D) ذو

المعادلة $y=-x-1$. ب- برهن أن $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x+\frac{1}{2}\right]=0$.

جـ - استنتج أن المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) في جوار $(+\infty)$ يطلب اعطاء معادلته .

5) أنشئ المنحني (C) في معلم متعامد ومتجانس .

6) λ عددجد حقيقي سالب . أ- احسب المساحة $S(\lambda)$ المحددة بالمنحني (C) و المستقيمات $y=-x-1$ و $x=\lambda$ و $x=0$.

ب- احسب $\lim S(\lambda)$ لما $\lambda \to -\infty$.

مسألة 9 :

I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة بـ: $f(x)=x-\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$ و ليكن (C) منحنيها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (طول الوحدة $2cm$)

1) أ- عين مجموعة تعريف الدالة f . ب- برهن أن الدالة f فردية.

جـ - احسب $f\left(\dfrac{1}{2}\ln 2\right)$. د – أدرس تغيرات الدالة f .

2)أ- برهن أن المستقيمين (D) و (D') اللذين معادلتاهما $y=x-1$ و $y=x+1$ مقاربان للمنحني (C) .

3) أنشئ المنحني (C) .

II) لتكن الدالة g المعرفة بـ : $g(x)=\ln(e^{x}-e^{-x})$.

1) أ- عين مجموعة تعريف الدالة g . ب- احسب $g'(x)$.

2) λ عدد حقيقي حيث $\lambda \geq 1$. احسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي لمجموعة النقط $N(x;y)$ من المستوي حيث: $\begin{cases} 1 \leq x \leq \lambda \\ x-1 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

3) ليكن (D_m) المستقيم ذو المعادلة $y=x+m$. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي عدد نقاط التقاطع مع المستقيم (D_m) .

مسألة 10 :

I) لتكن الدالة العددية f المعرفة بـ: $f(x)=(2x^2-3x)e^x$ و ليكن (C) منحنيها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أدرس تغيرات الدالة f .

2) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (C).

3) بين أن (C) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما .

4) أ- عين معادلة المماس للمنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها 0 .

ب- أرسم هذا المماس و المنحني (C) .

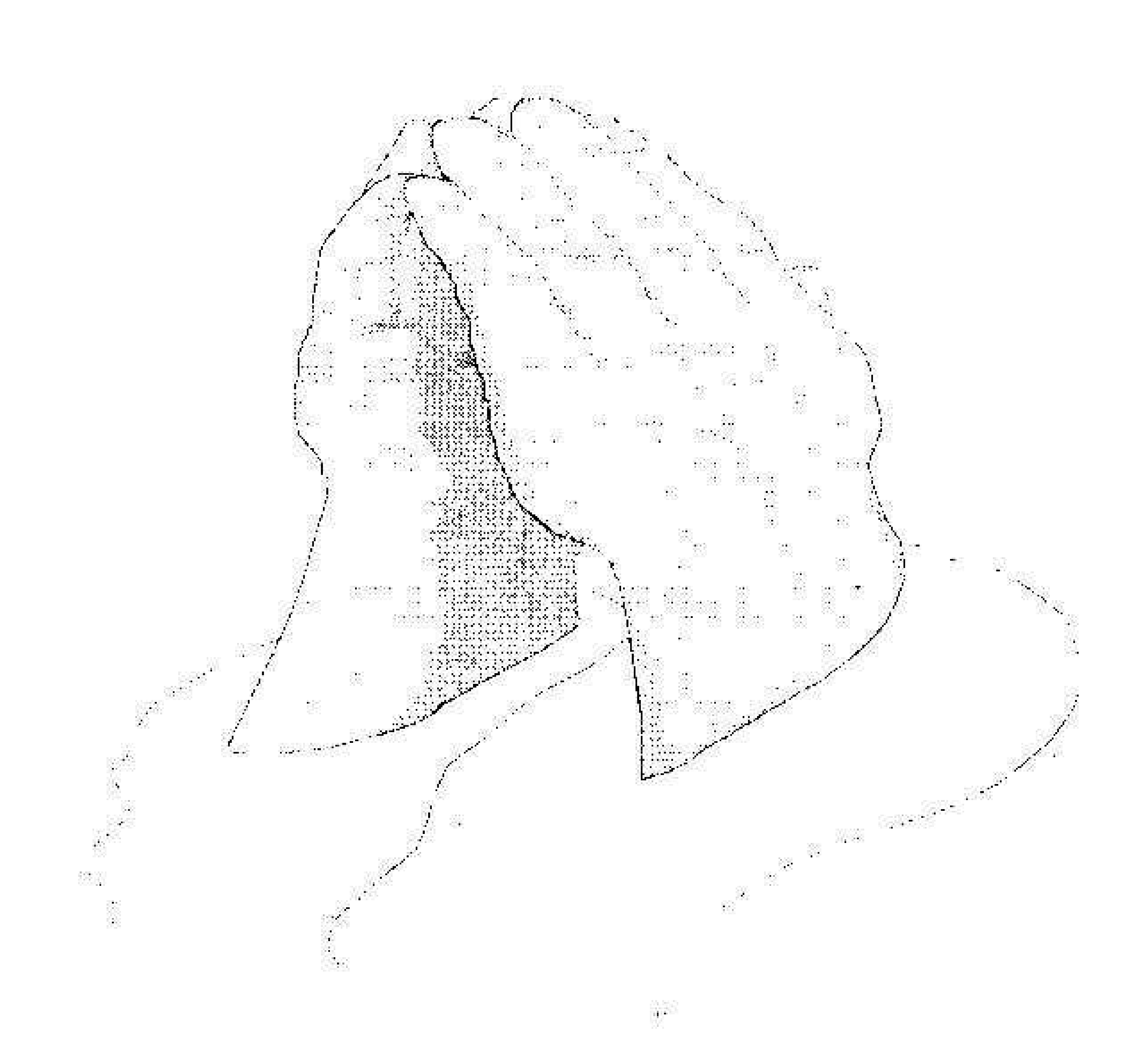
II) لتكن الدالة l المعرفة بـ: $l(x)=(2x^2+ax+b)e^x$ حيث a و b عددان حقيقيان .

1) أوجد الشرط الذي يحققه a و b حتى تقبل الدالة l قيمة حدية كبرى و قيمة حدية صغرى.

2)أ- عين العددين a و b حتى تكون الدالة l أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$.

ب- احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) و المستقيمات التي معادلاتها:

$y=0$ ، $x=1$ ، $x=\frac{3}{2}$.



رب اشرح لي صدري و يسر لي أمري و احلل عقدة من لساني يفقهوا قولي

بالتوفيق إن شاء الله في البكالوريا - محمد صابور

محتويات الكتاب

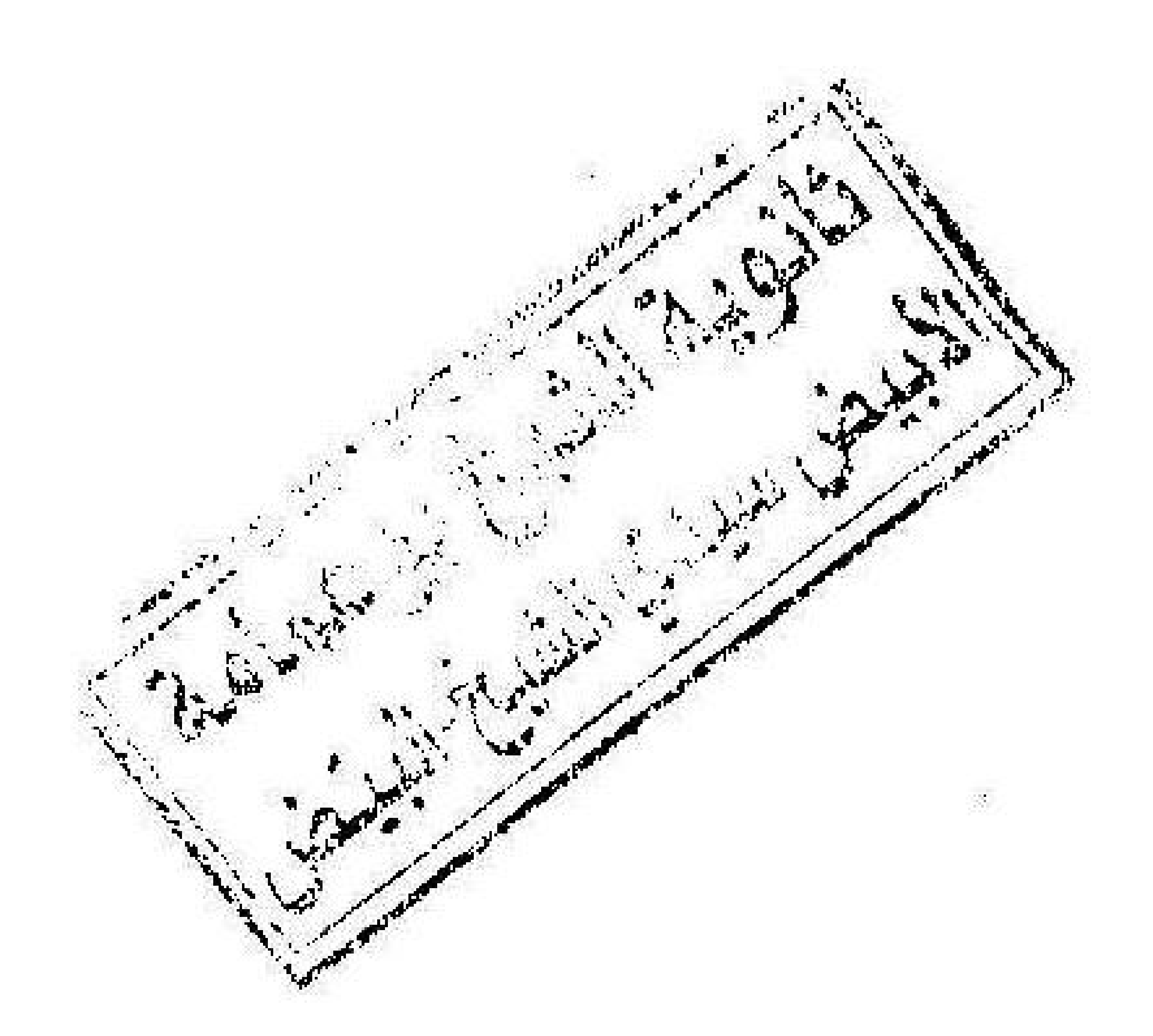


العلم نور والجهل ظلام

Scanned by: Mekkaoui Ayoub

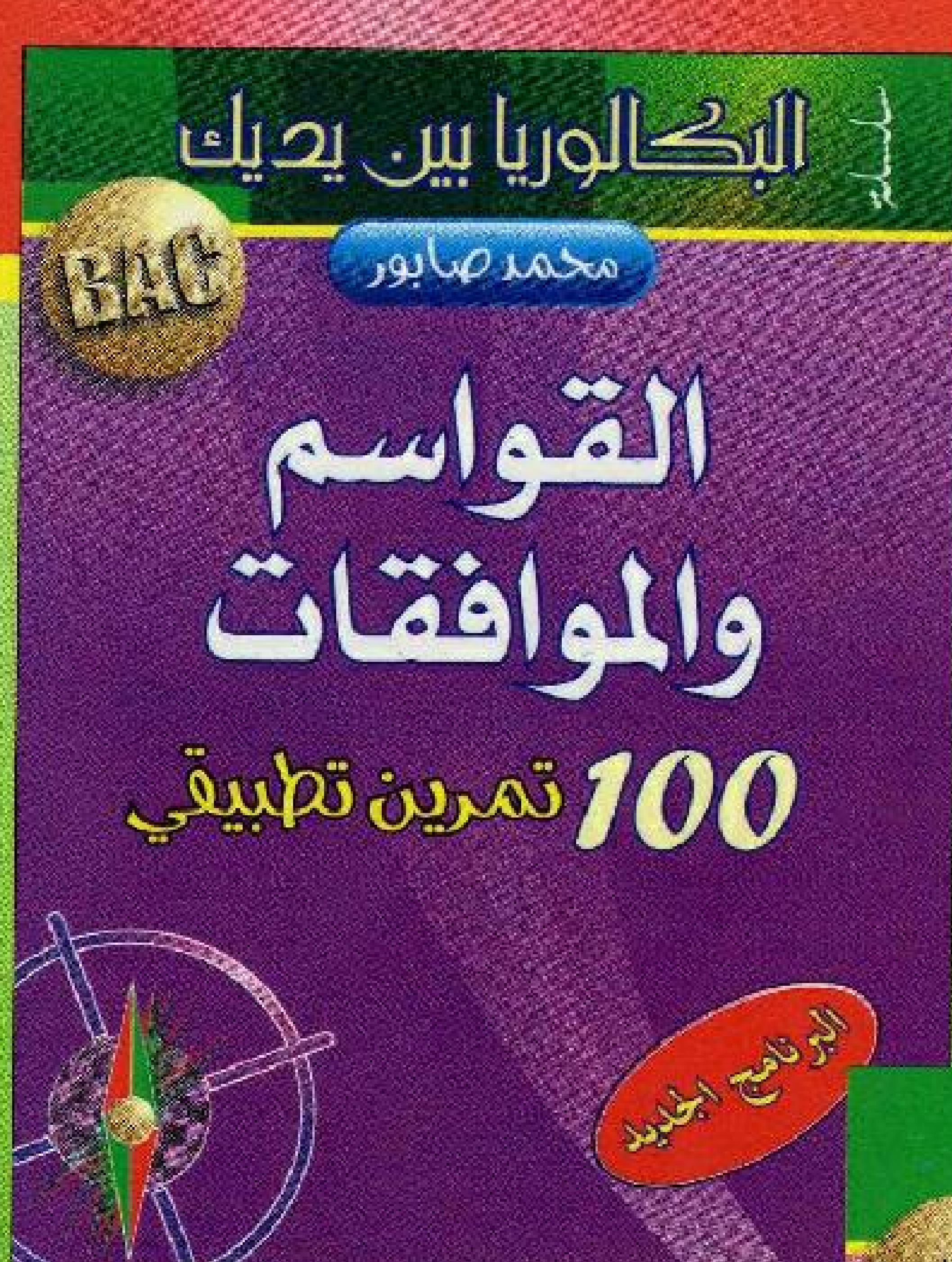
Email: ayoubsoft2011@hotmail.fr

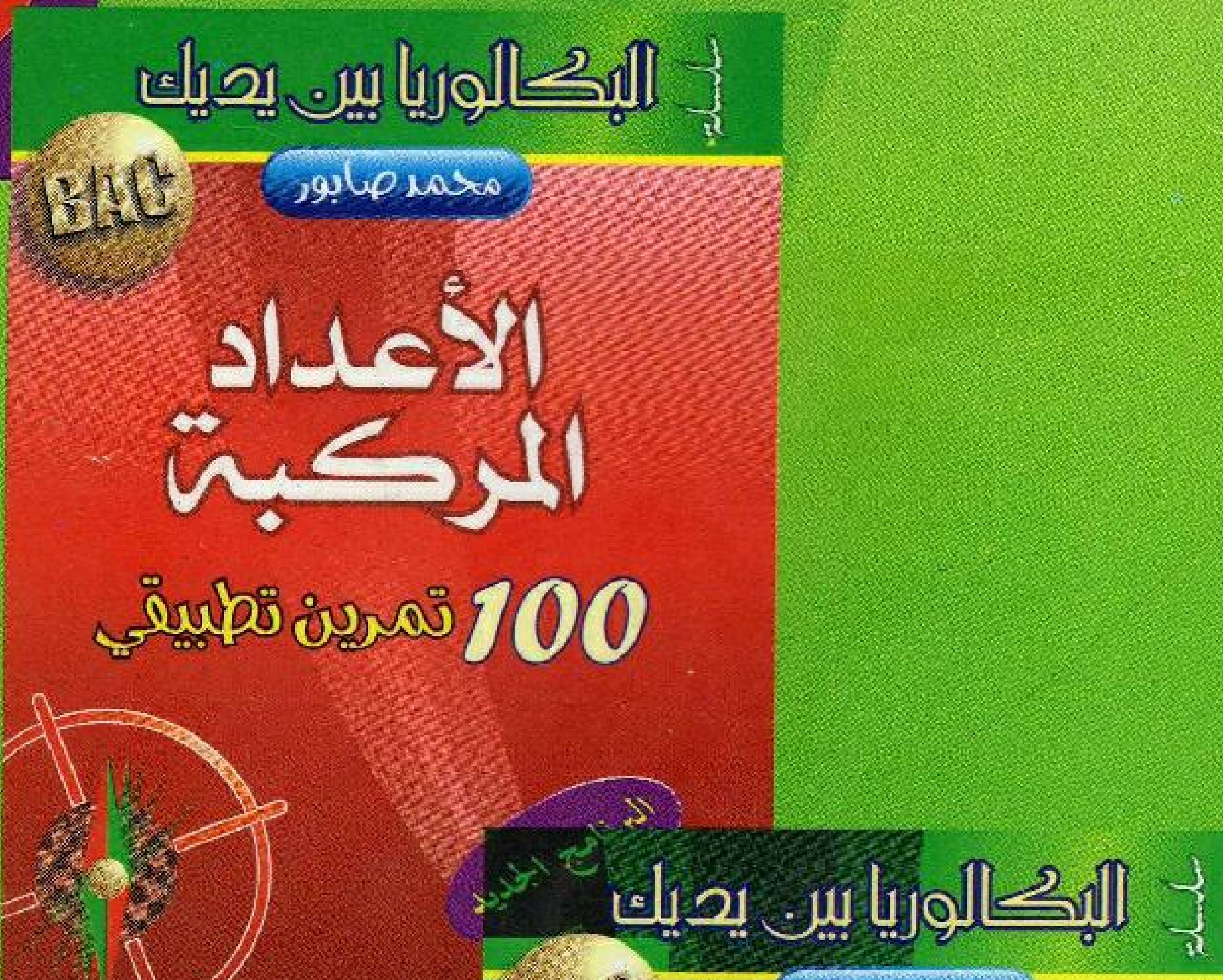
24/04/2015





في نفس السلسلة





سلسلة البكالوريا بين يديك
BAC
محمد صابور
المتتاليات العددية
100 تمرين تطبيقي
البرنامج الجديد

ISBN : 978-9947-0-1946-7